# 2023～2024学年度武汉市部分学校高三年级十月调研考试

# 数学试卷

武汉市教育科学考试院命制　　　　2023.10.7

**本试卷共5页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。**

**注意事项：**

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设集合 $M=\left\{x\left|\dfrac{x+1}{x-2}\le 0\right.\right\}$，$N=\left\{y\mid y=\sqrt{4-x^2}\right\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{x\mid 0\le x\le 2\}$　　B. $\{x\mid 0\le x<2\}$　　C. $\{x\mid -1\le x\le 2\}$　　D. $\{x\mid -1\le x<2\}$

2. 若曲线 $y=\dfrac{x+1}{e^x}$ 在 $x=a$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形面积为 $\dfrac{e}{2}$，则 $a$ 的值可能是

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 0　　D. $-1$

3. 物种多样性是指一定区域内动物、植物及微生物种类的丰富程度，是反映群落结构和功能特征的较为有效的指标，通常用 $Shannon-Wiener$ 指数 $H$ 来衡量一个群落的物种多样性，$H=-\sum\limits_{i=1}^{s}\left(P_i\ln P_i\right)$，其中 $s$ 为群落中物种总数，$P_i$ 为第 $i$ 个物种的个体数量占群落中所有物种个体数量的比例．已知某地区一群落初始指数为 $H_1$，群落中所有物种个体数量为 $N$，在引入数量为 $m$ 的一个新物种后，指数 $H_2=$

A. $\ln(N+m)-\dfrac{N\ln N+m\ln m-NH_1}{N+m}$　　B. $\dfrac{N\ln N+m\ln m-H_1}{N+m}+\ln(N+m)$

C. $\ln(N+m)+\dfrac{N\ln N+m\ln m-NH_1}{N+m}$　　D. $\dfrac{N\ln N+m\ln m-H_1}{N+m}-\ln(N+m)$

4. 在边长为 $a$ 的正六边形 $ABCDEF$ 中，$M,N$ 分别为 $BE,CF$ 上的动点(不含端点)，若 $D,M,N$ 三点构成等边三角形，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$

A. 有最大值，无最小值　　B. 有最大值和最小值

C. 有最小值，无最大值　　D. 无最大值和最小值

5. 已知双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，$A$ 为 $E$ 的左顶点，$F$ 为 $E$ 的右焦点，以 $F$ 为圆心，$|AF|$ 为半径的圆交 $E$ 的两条渐近线于 $P,Q$ 两点($P,Q$ 分别位于第一、四象限)，若四边形 $APFQ$ 为菱形，则 $E$ 的离心率 $e\in$

A. $\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{5}{2},3\right)$　　C. $\left(3,\dfrac{7}{2}\right)$　　D. $\left(\dfrac{7}{2},4\right)$

6. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$，$x=\dfrac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的零点，$x=-\dfrac{1}{2}$ 为 $y=f(x)$ 图像的对称轴，若直线 $y=-\dfrac{6}{5}x+\dfrac{3}{5}$ 与 $y=f(x)$ 的所有交点的横坐标之和为 $\dfrac{7}{2}$，则 $\omega$ 的值为

A. $\dfrac{3\pi}{2}$　　B. $-\dfrac{5\pi}{2}$　　C. $\dfrac{5\pi}{2}$ 或 $-\dfrac{3\pi}{2}$　　D. $-\dfrac{3\pi}{2}$ 或 $-\dfrac{5\pi}{2}$

7. 现有一上窄下宽的圆台形密闭容器(容器壁厚度忽略不计)，欲测量其体积. 已知容器下底面半径为6，高为4，将容器置于水平面上，注入一定量的水，测得液面高度为2；若将容器倒置，再次测得液面高度为3，则该容器的体积约为

A. $70\pi$　　B. $80\pi$　　C. $90\pi$　　D. $100\pi$

8. 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}-a\ln x(a\in\mathbf{R})$，若对于 $\forall x\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)\geq ax-e^2$ 恒成立，则 $a$ 的最大值为

A. $\dfrac{1}{e}$　　B. $\sqrt{e}$　　C. $e$　　D. $e^2$

**二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.**

9. 已知 $z_1,z_2,z_3$ 为非零复数，则下列条件中，能使 $z_1=z_2$ 的是来源：高三标答公众号

A. $z_1-\overline{z_1}=z_2-\overline{z_2}$　　B. $z_1\cdot|z_1|=z_2\cdot|z_2|$　　C. $\overline{z_1\cdot z_3}=\overline{z_2\cdot z_3}$　　D. $\left|\dfrac{z_1}{z_3}\right|=\left|\dfrac{z_2}{z_3}\right|$

10. 下表是某高校数学专业近五年的录取平均分与当年该学校的最低提档线对照表. 据以往数据可知，该大学每年数学专业的录取分数 $\xi$ 服从正态分布 $N(\mu,16)$，其中 $\mu$ 为当年该大学的数学专业录取平均分，假设2023年该校最低提档分数线为540分，数学专业录取学生的成绩在584分以上的有3人，

且进入本专业高考成绩前46名的学生可以获得一等奖学金，则

| 年份 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 |
|---|---|---|---|---|---|
| 年份代码/$x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 该校最低提档分数线 | 510 | 511 | 520 | 512 | 526 |
| 数学专业录取平均分 | 522 | 527 | 540 | 536 | 554 |
| 提档线与数学专业录取平均分之差/$y$ | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 |

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$；

参考数据：$P(\mu-\sigma<\zeta\le\mu+\sigma)\approx 0.683, P(\mu-2\sigma<\zeta\le\mu+2\sigma)\approx 0.954$ .

A. $y$ 关于 $x$ 的回归直线必经过点 $(3,20)$

B. $y$ 与 $x$ 的样本相关系数 $r$ 约为 $0.9$

C. 该校数学专业2023年录取人数为200人

D. 一等奖学金分数线应设定为580分

11. 已知函数 $f(x)=\sin(\sin x)+\cos(\cos x)$，$g(x)=\sin(\cos x)+\cos(\sin x)$ ，则

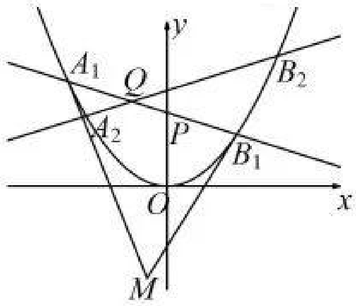
A. $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

B. $g(x)$ 为周期为 $2\pi$ 的偶函数

C. $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最小值均大于 0

D. $g(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上有 5 个极值点

12. 如图，已知抛物线 $C: x^2=4y$，直线 $l_1$ 与 $C$ 交于 $A_1,B_1$ 两点，与 $y$ 轴交于 $P$ 点，且直线 $l_2$ 与 $C$ 交于 $A_2,B_2$ 两点，与 $l_1$ 交于 $Q$ 点（$P,Q$ 不重合），过 $A_1,B_1$ 作 $C$ 的两条切线 $MA_1,MB_1$，记 $l_1,l_2$ 的斜率分别为 $k_1,k_2$，$A_1,B_1$ 的纵坐标分别为 $y_1,y_2$，则




A. 若 $y_1y_2=2$，则 $l_1$ 经过 $C$ 的焦点

B. 若 $|A_1B_1|=4$，则 $S_{\triangle MA_1B_1}$ 的最大值为 4

C. 若 $k_1+k_2=0$，则 $\dfrac{|A_1Q|}{|B_1Q|}=\dfrac{|A_2Q|}{|B_2Q|}$ 恒成立

D. 若 $P,Q$ 分别为 $A_1B_1$ 的三等分点，则 $Q$ 的轨迹方程为 $x^2=\dfrac{3}{4}y$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知二项式 $\left(ax^2-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式的常数项为 5，则展开式中各项系数之和为__________.

14. 已知圆 $O_1: x^2+(y-2)^2=3$，圆 $O_2$ 与圆 $O_1$ 关于直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 对称，圆 $O_3$ 与圆 $O_2$ 关于 $y$ 轴对称. 若 $A,B,C$ 分别为圆 $O_1,O_2,O_3$ 上的动点，则 $\triangle ABC$ 周长的最大值为__________.

15. 在空间四边形 $ABCD$ 中，$E,F,G$ 分别为 $AB,CD,BD$ 的中点，若 $AB\perp EF,CD\perp EF,AB=EF=6$，$CD=2$，则 $\cos\angle EGF$ 的取值范围是__________.

16. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=6,a_2=24$，且 $\dfrac{n(a_{n+1}-a_n)-a_n}{n(a_{n-1}-a_n)+a_n}=\dfrac{2-n}{n-1}(n\geq 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_4=$__________；设数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，则 $S_n=$__________.（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

17.（10 分）

已知 $\triangle ABC$ 的内角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$，且 $\overline{AC}\cdot\overline{AB}=\dfrac{1}{3}\overline{AB}\cdot\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}$．

(1)求 $A$；

(2)从① $\dfrac{b^2+c^2}{a^2}$、② $\dfrac{ac+ab}{bc}$ 这两个式子中选择一个，并求出其最小值．

注：如果选择两个式子分别解答，按第一个解答计分．

18.（12 分）

已知椭圆 $\Gamma$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\dfrac{\sqrt{5}}{6}$，$\Gamma$ 的左、右焦点分别为 $F_1,F_2$，过 $F_1$ 且斜率为 $\dfrac{1}{2}$ 的直线 $l$ 交 $\Gamma$ 于 $A,B$ 两点，$P$ 为 $AB$ 的中点．

(1)求直线 $OP$ 的斜率；

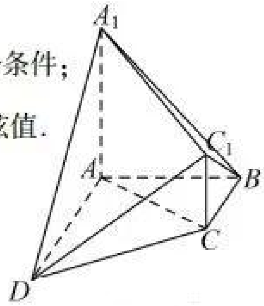
(2)求 $\triangle AF_1F_2$ 与 $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆半径之比．

19.（12 分）

如图，在多面体 $ABCD-A_1C_1$ 中，底面 $ABCD$ 为梯形，$AD\,//\,BC$；侧面 $AA_1D$ 与 $BCC_1$ 均为等腰直角三角形，$AA_1\,//\,CC_1$，$\angle A_1AD=\angle BCC_1=90^\circ$．

(1)设 $p$：平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 $ABCD$，$q$：$AD\perp AC$，求证：$p$ 是 $q$ 的必要不充分条件；

(2)若 $AD\perp AC,A_1C_1=AD=2BC=2,AC=\sqrt{3}$，求二面角 $B-A_1C_1-D$ 的余弦值．



20.(12分)

已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{1}{a_n}=\sqrt{2n+2}(n\in \mathbf{N}^*)$,且$a_n<1$,$S_n$是数列$\{a_n\}$的前$n$项和,数列$\{b_n\}$满足$b_n=S_n+\sqrt{2}$.

(1)求$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式;

(2)设$T_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项积,求证:$\ln T_n^{\ 2}<n^2+2n$.

21.(12分)

在一个传染病流行的群体中,通常有三类人群:$S$类(易感染者)、$I$类(感染者)、$R$类(康复者),且三类人群可按照“$S$类→$I$类→$R$类→$S$类”的方向彼此转化. 假设在一个600人的封闭环境中,第$n$天$S$类、$I$类、$R$类人群人数分别为$S_n$,$I_n$,$R_n$,其中第一天有$S_1=540$,$I_1=60$,$R_1=0$. 为了简化模型,我们约定各类人群每天转化的比例参数恒定:$S$类→$I$类占当天$S$类比例为$\alpha$,$I$类→$R$类占当天$I$类比例为$\beta$,$R$类→$S$类占当天$R$类比例为$\gamma$,已知对于传染病$A$有$\alpha=\dfrac{1}{5}$,$\beta=\dfrac{1}{10}$,$\gamma=\dfrac{1}{60}$.

(1)求$I_3$;

(2)证明:存在常数$p$,$q$,使得$\{pS_n+I_n-q\}$是等比数列;

(3)若对于传染病$B$有$\alpha=\dfrac{1}{15}$,$\beta=\dfrac{1}{6}$,$\gamma=0$. 已知防止传染病大规模传播的关键途径包括:①控制感染人数;②保护易感人群,请选择一项,通过计算说明:实际生活中,相较于传染病$B$,需要投入更大力量防控传染病$A$.

22.(12分)

已知函数$f(x)=a\ln^2 x-bx^2(a>0,b>0)$有两个极值点,分别记作$x_1,x_2(x_1<x_2)$.

(1)讨论$f(x)$的零点个数;

(2)是否存在实数$a,b$,使得$f(x_1)+f(x_2)=0$?请说明理由.

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线