高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合、常用逻辑用语、不等式、函数、导数、三角函数、三角恒等变换、解三角形、平面向量、复数。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $\frac{3+i}{z}=1-i$，则 $|z|=$

A. $\sqrt{5}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

2. 设集合 $A=\{x|y=\ln(x-3)\}$，$B=\{x|x\leqslant -1\}$，则 $\{x|-1<x\leqslant 3\}=$

A. $\complement_{R}(A\cap B)$　　B. $\complement_{R}(A\cup B)$　　C. $A\cap(\complement_{R}B)$　　D. $A\cup(\complement_{R}B)$

3. 已知 $P(\sin\theta,\cos\theta)$ 是角 $-\frac{\pi}{3}$ 的终边上一点，则 $\tan\theta=$

A. $-\sqrt{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

4. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和实数 λ，则“$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$”是“$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 扇子是引风用品，夏令必备之物. 我国传统扇文化源远流长，是中华文化的一个组成部分. 历史上最早的扇子是一种礼仪工具，后来慢慢演变为纳凉、娱乐、观赏的生活用品和工艺品. 扇子的种类较多，受大众喜爱的有团扇和折扇. 如图1是一把折扇，是用竹木做扇骨，用特殊纸或绫绢做扇面而制成的. 完全打开后的折扇为扇形(如图2)，若图2中 $\angle AOB=\theta$，C、D 分别在 OA，OB 上，$AC=BD=m$，$\overset{\frown}{AB}$ 的长为 l，则该折扇的扇面 $ABDC$ 的面积为

图1

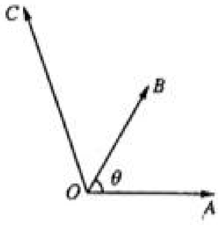
图2

A. $\frac{m(l-\theta)}{2}$　　B. $\frac{m(l-\theta m)}{2}$　　C. $\frac{m(2l-\theta)}{2}$　　D. $\frac{m(2l-\theta m)}{2}$

6. 已知 $a=\left(\frac{3}{2}\right)^{-0.6}$，$b=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}$，$c=\left(\frac{2}{3}\right)^{0.9}$，则

A. $b>c>a$　　B. $c>a>b$　　C. $b>a>c$　　D. $a>c>b$

7. 如图，已知两个单位向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$和向量$\overrightarrow{OC}$，$|\overrightarrow{OC}|=2$. $\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角为 θ，且 $\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{OC}$的夹角为 45°，若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}(x,y\in\mathbf{R})$，则 $x+y=$



A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}$

C. 1　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. 已知函数 $f(x)=(\ln x)^2-\frac{a}{2}x\ln x+\frac{a}{e}x^2$ 有三个零点 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，则 a 的取值范围是

A. $\left(-\frac{1}{e^2-e},0\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{e^2},0\right)$　　C. $\left(-\frac{1}{2e},0\right)$　　D. $\left(-\frac{2}{e},0\right)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，$x_1,x_2$ 为 $f(x)$的两个极值点，且$|x_1-x_2|$的最小值为 $\frac{\pi}{2}$，直线 $x=\frac{\pi}{3}$为 $f(x)$图象的一条对称轴，将 $f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度后得到函数$g(x)$的图象，则

A. $\omega=4$　　B. $\varphi=-\frac{\pi}{6}$

C. $f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$对称　　D. $g(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$对称

10. 下列式子中最小值为 4 的是

A. $\sin^2x+\frac{4}{\sin^2x}$　　B. 2^x+2^{2-x}

C. $\frac{1}{\sin^2x}+\frac{1}{\cos^2x}$　　D. $4\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$

11. 已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，其导函数为 $f'(x)$，$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(4+x)-f(-x)=0$，且$f(x+1)$为奇函数，若 $f'(1)=-1$，则

A. $f(1)=0$　　B. 4 为 $f(x)$的一个周期

C. $f'(2)=1$　　D. $f'(2\ 023)=1$

12. 在△ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，P 为△ABC 内一点，则下列命题正确的是

A. 若$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，则△$PAC$ 的面积与△PAB 的面积之比是 2∶3

B. 若 $a=3\sqrt{2}$，$b=4$，$A=\frac{\pi}{4}$，则满足条件的三角形有两个

C. 若$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|}=-\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，则△$ABC$ 为等腰三角形

D. 若点 P 是△ABC 的重心，且 $2a\cdot\overrightarrow{PA}+b\cdot\overrightarrow{PB}+\frac{2\sqrt{3}}{3}c\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，则△$ABC$ 为直角三角形

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为__________.

14. $\tan 20^\circ+4\sin 20^\circ=$__________.

15. 函数 $y=\frac{\sin x-\cos x}{2-\sin x\cos x}$ 的值域为__________.

16. 函数 $f(x)=(x^2-6x)\sin(x-3)+x+a(x\in[0,6])$ 的最大值为 M，最小值为 m，若 $M+m=8$，则 $a=$__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知向量 $\boldsymbol{a}=(2\cos^2 x,\sin x)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\sqrt{3}\cos x\right)$，函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间；

(2)在△ABC 中，$A+B=\frac{7}{12}\pi$，$f(A)=1$，$BC=2\sqrt{3}$，求边 AC 的长.

18.（本小题满分 12 分）

已知 $f(x)=\log_3(m^x+1)-x(m>0$，且 $m\neq1)$ 是偶函数.

(1)求 m 的值；

(2)若关于 x 的不等式 $\frac{1}{2}\cdot 3^{f(x)}-3[(\sqrt{3})^x+(\sqrt{3})^{-x}]+a\leqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有解，求实数 a 的最大整数值.

19.（本小题满分 12 分）

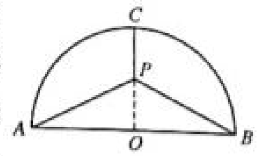
已知 $\sin\alpha$ 是方程 $5x^2-7x-6=0$ 的根.

(1)求 $\dfrac{\sin\left(-\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cdot\cos(2\pi-\alpha)\cdot\tan(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$ 的值；

(2)若 α 是第四象限角，$\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{13}\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$，求 $\sin\left(\beta-\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

20.(本小题满分 12 分)

南京玄武湖号称“金陵明珠”,是我国仅存的皇家园林湖泊.在玄武湖的一角有大片的荷花,每到夏季,荷花飘香,令人陶醉.夏天的一个傍晚,小胡和朋友游玄武湖,发现观赏荷花只能在岸边,无法深入其中,影响观赏荷花的乐趣,于是他便有了一个愿景:若在玄武湖一个盛开荷花的一角(该处岸边近似半圆形,如图所示)设计一些栈道和一个观景台,观景台 P 在半圆形的中轴线 OC 上(图中 OC 与直径 AB 垂直,P 与 O,C 不重合),通过栈道把 PA,PB,PC,AB 连接起来,使人行在其中,犹如置身花海之感.已知 $AB=200$ m,$\angle PAB=\theta$,栈道总长度为函数 $f(\theta)$.



(1)求 $f(\theta)$;

(2)若栈道的造价为每米 5 万元,试确定观景台 P 的位置,使实现该愿景的建造费用最小(观景台的建造费用忽略不计),并求出实现该愿景的建造费用的最小值.

21.(本小题满分 12 分)

在锐角$\triangle ABC$中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,S 为$\triangle ABC$的面积,且 $a^2=2S+(b-c)^2$.

(1)求 $\tan A$ 的值;

(2)若 $a=8$,证明:$16<b+c\leqslant 8\sqrt{5}$.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-\sin x-\cos x$,$f'(x)$为其导函数.

(1)求 $f(x)$在$[-\pi,+\infty)$上极值点的个数;

(2)若 $f'(x)\geqslant ax+2-2\cos x(a\in\mathbf{R})$对$\forall x\in[-\pi,+\infty)$恒成立,求 a 的值.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. A　由$\frac{3+i}{z}=1-i$，得$z=\frac{3+i}{1-i}=\frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+4i}{2}=1+2i$，所以$|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. 故选 A.

2. B　由题意得$A=\{x|x>3\}$，所以$A\cap B=\varnothing$，则$\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=\mathbf{R}$，故 A 错误；$A\cup B=\{x|x\leqslant -1$，或$x>3\}$，则$\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x|-1<x\leqslant 3\}$，故 B 正确；又$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x>-1\}$，所以$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|x>3\}$，故 C 错误；$A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|x>-1\}$，故 D 错误. 故选 B.

3. B　$\sin\theta=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，$\cos\theta=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.

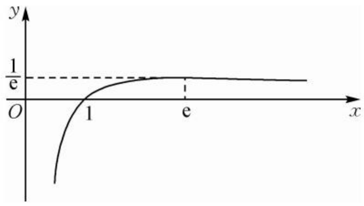
4. A　若$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，由共线向量定理知$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，则“$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$”是“$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线”的充分条件；若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，如$\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(0,0)$，则$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$不成立，故“$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$”不是“$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线”的必要条件. 综上，“$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$”是“$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线”的充分不必要条件. 故选 A.

5. D　由弧长公式可知，$l=\theta\cdot OA$，所以$OA=\frac{l}{\theta}$，则$OC=\frac{l}{\theta}-m$，所以该折扇的扇面的面积为$\frac{1}{2}l\cdot\frac{l}{\theta}-\frac{1}{2}\theta\cdot\left(\frac{l}{\theta}-m\right)^2=\frac{m(2l-m\theta)}{2}$. 故选 D.

6. C　$1=\left(\frac{3}{2}\right)^0>\left(\frac{3}{2}\right)^{-0.6}=\left(\frac{2}{3}\right)^{0.6}>\left(\frac{2}{3}\right)^{0.9}$，即$1>a>c$，又$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}=\log_3 4>1$，所以$b>a>c$. 故选 C.

7. D　由$\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\theta\in[0,\pi]$，得$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$. 由题意，得$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=1\times 2\cos 45°=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1\times 2\cos(\theta+45°)=-\frac{\sqrt{2}}{5}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{3}{5}$，在$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$两边分别点乘$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=x+\frac{3}{5}y$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}x+y$，两式相加，得$\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{5}=\frac{8}{5}(x+y)$，所以$x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 D.

8. D　由题意知$x>0$，所以$f(x)=0$可化为$\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2-\frac{a}{2}\cdot\frac{\ln x}{x}+\frac{a}{e}=0$，令$u=g(x)=\frac{\ln x}{x}$，则$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，所以当$0<x<e$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(0,e)$上单调递增；当$x>e$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(e,+\infty)$上单调递减，所以$g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$，又$x\to 0$时，$g(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$时，$g(x)\to 0$，故$g(x)$的值域为$\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$，且其图象如图所示.



则问题转化为$h(u)=u^2-\frac{a}{2}u+\frac{a}{e}$的零点：①一个在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$内，另一个为$\frac{1}{e}$，则$\begin{cases}\Delta>0,\\ h(0)>0,\\ h\left(\frac{1}{e}\right)=0,\\ 0<\frac{a}{4}<\frac{1}{e},\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{a^2}{4}-\frac{4a}{e}>0,\\ \frac{a}{e}>0,\\ \frac{1}{e^2}-\frac{a}{2e}+\frac{a}{e}=0,\\ 0<a<\frac{4}{e},\end{cases}$无

解.②一个在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$内,另一个在$(-\infty,0]$内,若$h(0)=0$,则$a=0$,$h(u)=u^2$,函数$h(u)$有一个零点,不合题意,则

$$\begin{cases}h(0)<0,\\h\left(\frac{1}{e}\right)>0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}\frac{a}{e}<0,\\\frac{1}{e^2}-\frac{a}{2e}+\frac{a}{e}>0,\end{cases}\text{解得}-\frac{2}{e}<a<0.\text{故选 D.}$$

9.BD　因为x_1,x_2为$f(x)$的两个极值点,且$|x_1-x_2|$的最小值为$\frac{\pi}{2}$,所以$f(x)$的周期$T=\pi$,所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$,故A错误;又$x=\frac{\pi}{3}$为$f(x)$图象的一条对称轴,所以$\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,即$\varphi=-\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{6}$,故B正确;将$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度,得$g(x)=\sin 2x$,所以$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=-1\neq0$,$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\pi=0$,故C错误,D正确.故选BD.

10.BC　$\sin^2x+\frac{4}{\sin^2x}\geqslant2\sqrt{\sin^2x\times\frac{4}{\sin^2x}}=4$,当且仅当$\sin^2x=\frac{4}{\sin^2x}$,即$\sin^2x=2$时等号成立,因为$|\sin x|\leqslant1$,所以$\sin^2x=2$不成立,故$\sin^2x+\frac{4}{\sin^2x}$的最小值不是4;$2^x+2^{2-x}\geqslant2\sqrt{2^x\times2^{2-x}}=4$,当且仅当$2^x=2^{2-x}$,即$x=1$时等号成立,故$2^x+2^{2-x}$的最小值为4;$\frac{1}{\sin^2x}+\frac{1}{\cos^2x}=\left(\frac{1}{\sin^2x}+\frac{1}{\cos^2x}\right)(\sin^2x+\cos^2x)=2+\frac{\cos^2x}{\sin^2x}+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}\geqslant4$,当且仅当$\frac{\cos^2x}{\sin^2x}=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}$,即$|\sin x|=|\cos x|$时等号成立,故$\frac{1}{\sin^2x}+\frac{1}{\cos^2x}$的最小值为4;因为当$x=0$时,$4\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=0$,所以$4\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$的最小值不为4.故选BC.

11.ABD　法一:因为$f(x+1)$为奇函数,所以$f(-x+1)=-f(x+1)$,则$f(1)=0$,所以$f(-x)=-f(2+x)$,又$f(4+x)-f(-x)=0$,所以$f(x+4)=-f(x+2)$,即$f(x+2)=-f(x)$,所以$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,即$f(x)$的一个周期为4,故A、B正确;由$f(x+2)=-f(x)$两边求导,得$f'(x+2)=-f'(x)$.因为$f(-x+1)=-f(x+1)$,两边求导,得$f'(-x+1)\cdot(-1)=-f'(x+1)$,即$f'(-x+1)=f'(x+1)$,所以$f'(x)=f'(2-x)$,又$f(4+x)-f(-x)=0$,两边求导,得$f'(4+x)+f'(-x)=0$,所以$f'(2)=0$.由$f(x+4)=f(x)$两边求导得$f'(x+4)=f'(x)$,故$f'(x)$的一个周期为4,所以$f'(2\,023)=f'(-1)=-f'(1)=1$,故C错误,D正确.故选ABD.

法二:由法一,得$f(x)$的图象关于点$(1,0)$和$x=2$对称,且周期为4,$f'(1)=-1$,取$f(x)=\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x$,则$f'(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x\right)=-\sin\frac{\pi}{2}x$,于是$f(1)=\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}=0$,$f'(2)=0$,$f'(2\,023)=-\sin\frac{2\,023\pi}{2}=1$,故ABD正确,C错误.故选ABD.

12.ACD　对于选项A,由$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$,得$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=-2(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$,分别取$AC,BC$的中点$D,E$,则$\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PE}$,所以$\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle PAB}}=\frac{2S_{\triangle PAD}}{S_{\triangle PAB}}=\frac{2}{3}$,故A正确;对于选项B,$a=3\sqrt{2}>b$,则$A=\frac{\pi}{4}>B$,所以$\triangle ABC$是以角$C$为钝角的钝角三角形,故B错误;对于选项C,由$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|}=-\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}|}$,得$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$.易知$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$与$\angle BAC$的角平分线共线,所以$\angle BAC$的角平分线与$BC$垂直,故$AB=AC$,$\triangle ABC$是等腰三角形,故C正确;对于选项D,因为点$P$是$\triangle ABC$的重心,所以$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$,$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$,代入条件并整理,得$-\frac{1}{3}\cdot\left[(2a-b)\overrightarrow{AB}+\left(2a-\frac{2\sqrt{3}c}{3}\right)\overrightarrow{AC}+\left(b-\frac{2\sqrt{3}c}{3}\right)\overrightarrow{BC}\right]=\mathbf{0}$,即$(2a-b)\overrightarrow{AB}+\left(2a-\frac{2\sqrt{3}c}{3}\right)\overrightarrow{AC}+\left(b-\frac{2\sqrt{3}c}{3}\right)\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$.又$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$,代入并整理,得$\left(2a-2b+\frac{2\sqrt{3}c}{3}\right)\overrightarrow{AB}+\left(2a+b-\frac{4\sqrt{3}c}{3}\right)\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$,因为$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$不共线,所以

$\begin{cases}2a-2b+\dfrac{2\sqrt{3}c}{3}=0,\\2a+b-\dfrac{4\sqrt{3}c}{3}=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=2a,\\c=\sqrt{3}a.\end{cases}$所以 $a^2+c^2=4a^2=b^2$，故 B 为直角，所以$\triangle ABC$ 为直角三角形，故 D 正确. 故选 ACD.

13. $2x-y-1=0$ $f'(x)=\dfrac{e^x-(x-1)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{2-x}{e^x}$，所以 $f'(0)=2$，又 $f(0)=-1$，故所求切线方程为 $y-(-1)=2(x-0)$，即 $2x-y-1=0$.

14. $\sqrt{3}$ $\tan 20°+4\sin 20°=\dfrac{\sin 20°}{\cos 20°}+4\sin 20°=\dfrac{\sin 20°+4\sin 20°\cos 20°}{\cos 20°}=\dfrac{\sin 20°+2\sin 40°}{\cos 20°}=\dfrac{\sin 20°+2\sin(60°-20°)}{\cos 20°}=\dfrac{\sin 20°+\sqrt{3}\cos 20°-\sin 20°}{\cos 20°}=\sqrt{3}$.

15. $\left[-\dfrac{2\sqrt{2}}{5},\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\right]$ 令 $t=\sin x-\cos x$，则 $\sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}(-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$，所以 $y=\dfrac{2t}{3+t^2}(-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$，当 $t=0$ 时，$y=0$，当 $-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$，且 $t\neq0$ 时，$y=\dfrac{2}{t+\dfrac{3}{t}}$，令 $u=t+\dfrac{3}{t}$，易知 u 的值域为 $\left(-\infty,-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$，所以 y 的取值范围为 $\left[-\dfrac{2\sqrt{2}}{5},0\right)\cup\left(0,\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\right]$. 综上所述，所求函数的值域为 $\left[-\dfrac{2\sqrt{2}}{5},\dfrac{2\sqrt{2}}{5}\right]$.

16. 1 $f(x)=(x^2-6x)\sin(x-3)+x+a=[(x-3)^2-9]\sin(x-3)+x+a$，令 $t=x-3(t\in[-3,3])$，则原函数变为 $y=(t^2-9)\sin t+t+3+a$，令 $g(t)=(t^2-9)\sin t+t(t\in[-3,3])$，所以 $y=g(t)+3+a$，所以 $M=g(t)_{\max}+3+a$，$m=g(t)_{\min}+3+a$，所以 $M+m=g(t)_{\max}+g(t)_{\min}+6+2a$. 因为 $g(-t)=-g(t)$，所以 $g(t)$ 为奇函数，所以 $g(t)_{\max}+g(t)_{\min}=0$，所以 $M+m=6+2a=8$，解得 $a=1$.

17. 解：(1) 由题意得 $f(x)=\cos^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$，…………………… 2 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，…………………… 3 分

令 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\dfrac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，…………………… 4 分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\dfrac{2\pi}{3}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$. …………………… 5 分

(2) 由 (1) 知 $f(A)=\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}=1$，

所以 $\sin\left(2A+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $2A+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{13\pi}{6}\right)$，所以 $2A+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. …………… 7 分

因为 $A+B=\dfrac{7}{12}\pi$，所以 $B=\dfrac{\pi}{4}$，…………………… 8 分

由正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$，所以 $AC=\dfrac{BC\sin B}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{2}$. …………………… 10 分

18. 解：(1) 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)=f(-x)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

即 $\log_3(m^{-x}+1)+x=\log_3(m^x+1)-x$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，…………………… 2 分

又 $\log_3(m^{-x}+1)=\log_3\dfrac{m^x+1}{m^x}=\log_3(m^x+1)-\log_3m^x=\log_3(m^x+1)-x\log_3m$，

所以 $\log_3(m^x+1)-x\log_3m+x=\log_3(m^x+1)-x$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，…………………… 4 分

即 $x(\log_3m-2)=0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

必须 $\log_3m-2=0$，即 $m=9$.

故 $m=9$. …… 6 分

(2)由(1)知，$f(x)=\log_3(9^x+1)-x$，

故 $3^{f(x)}=3^{\log_3(9^x+1)-x}=3^x+\frac{1}{3^x}$. …… 7 分

设 $t=(\sqrt{3})^x+(\sqrt{3})^{-x}(t\geqslant 2)$，则 $t^2=3^x+\frac{1}{3^x}+2$，即 $3^x+\frac{1}{3^x}=t^2-2$，

所以原问题等价于关于 t 的不等式 $\frac{1}{2}t^2-3t+a-1\leqslant 0$ 在$[2,+\infty)$上有解，

所以 $a\leqslant\left(-\frac{1}{2}t^2+3t+1\right)_{\max}$. …… 9 分

又 $y=-\frac{1}{2}t^2+3t+1=-\frac{1}{2}(t-3)^2+\frac{11}{2}$，$t\in[2,+\infty)$， …… 10 分

所以当 $t=3$ 时，$y_{\max}=\frac{11}{2}$，

所以 $a\leqslant\frac{11}{2}$，故实数 a 的最大整数值为 5. …… 12 分

19. 解：(1)由 $\sin\alpha$ 是方程 $5x^2-7x-6=0$ 的根，可得 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ 或 $\sin\alpha=2$(舍)， …… 1 分

原式$=\dfrac{-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\times\cos\alpha\times(-\tan\alpha)}{\sin\alpha\times(-\sin\alpha)}=\dfrac{\cos\alpha(-\sin\alpha)\cos\alpha(-\tan\alpha)}{-\sin^2\alpha}$

$=\dfrac{\cos\alpha\sin^2\alpha}{-\sin^2\alpha}=-\cos\alpha$. …… 3 分

由 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，知 α 是第三象限角或第四象限角，

若 α 是第三象限角，则 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，此时 $-\cos\alpha=\frac{4}{5}$； …… 4 分

若 α 是第四象限角，则 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，此时 $-\cos\alpha=-\frac{4}{5}$. …… 5 分

故所求式子的值为 $\frac{4}{5}$ 或 $-\frac{4}{5}$. …… 6 分

(2)由(1)知，当 α 是第四象限角时，$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$， …… 7 分

由 $\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{13}\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$，得 $\cos\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{12}{13}$， …… 8 分

所以 $\sin\left(\beta-\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\left(\beta-\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left[\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)-\alpha\right]$ …… 10 分

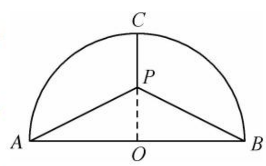
$=\cos\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)\cos\alpha+\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)\sin\alpha=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}+\frac{5}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{33}{65}$. …… 12 分

20. 解：(1)由题意知$\angle PAB=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$，$OC\perp AB$，$OA=OB=100$， …… 1 分

则 $PA=PB=\frac{100}{\cos\theta}$，$PO=100\tan\theta$，所以 $PC=100-100\tan\theta$， …… 3 分

所以 $f(\theta)=PA+PB+PC+AB=\frac{200}{\cos\theta}+100-100\tan\theta+200=100\left(\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}+3\right)\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$. …… 4 分

(2)建造栈道的费用 $F(\theta)=5f(\theta)=500\left(\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}+3\right)$， …… 5 分



$F'(\theta)=500\times\frac{2\sin\theta-1}{\cos^2\theta}$， …… 6 分

令 $F'(\theta)=0$，得 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，又 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$. …… 7 分

当 $0<\theta<\frac{\pi}{6}$ 时，$F'(\theta)<0$，当 $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{4}$ 时，$F'(\theta)>0$，

所以 $F(\theta)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，…………………… 9 分

所以 $F(\theta)_{\min}=F\left(\frac{\pi}{6}\right)=500(3+\sqrt{3})$，此时 $PC=100-100\tan\frac{\pi}{6}=100-\frac{100\sqrt{3}}{3}$，…………………… 11 分

故观景台位于离岸边半圆弧中点的距离为 $\left(100-\frac{100\sqrt{3}}{3}\right)$ 米时，建造费用最小，最小费用为 $500(3+\sqrt{3})$ 万元.

…………………… 12 分

21.（1）解：因为△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$，$2S=a^2-(b-c)^2$，

所以 $bc\sin A=a^2-b^2-c^2+2bc$，…………………… 1 分

由余弦定理，得 $a^2-b^2-c^2=-2bc\cos A$，…………………… 2 分

所以 $bc\sin A=2bc-2bc\cos A$，因为 $bc\neq 0$，

所以 $\sin A+2\cos A=2$. …………………… 3 分

又 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin^2A+\cos^2A=1$，所以 $\sin A+2\sqrt{1-\sin^2A}=2$，…………………… 4 分

化简得 $5\sin^2A-4\sin A=0$，解得 $\sin A=\frac{4}{5}$ 或 $\sin A=0$（不合题意，舍去），…………………… 5 分

因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{3}{5}$，$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{4}{3}$. …………………… 6 分

（2）证明：由正弦定理，得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{8}{\frac{4}{5}}=10$，

所以 $b=10\sin B$，$c=10\sin C=10\sin(A+B)$，…………………… 7 分

所以 $b+c=10\sin B+10\sin(A+B)=16\sin B+8\cos B=8\sqrt{5}\sin(B+\varphi)$，其中 φ 为锐角，且 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

…………………… 8 分

因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $-\frac{\pi}{2}<A-\varphi<\frac{\pi}{2}$，

又 $\sin A>\sin\varphi$，所以 $A>\varphi$，所以 $0<A-\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\frac{\pi}{2}-A+\varphi<\frac{\pi}{2}$，…………………… 9 分

又 $\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2},\\0<B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<\pi-A-B<\frac{\pi}{2},\\0<B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}\frac{\pi}{2}-A<B<\pi-A,\\0<B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$

所以 $\frac{\pi}{2}-A<B<\frac{\pi}{2}$. …………………… 10 分

所以 $\frac{\pi}{2}-A+\varphi<B+\varphi<\frac{\pi}{2}+\varphi$，

因为函数 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，

且 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-A+\varphi\right)=\cos(\varphi-A)=\cos\varphi\cos A+\sin\varphi\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $8\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}<8\sqrt{5}\sin(B+\varphi)\leqslant 8\sqrt{5}$，即 $16<b+c\leqslant 8\sqrt{5}$. …………………………………… 12 分

22. 解：(1) $f'(x)=e^x-\cos x+\sin x=e^x+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，…………………………………… 1 分

①当 $-\pi\leqslant x<-\frac{3\pi}{4}$ 时，$-\frac{5\pi}{4}\leqslant x-\frac{\pi}{4}<-\pi$，所以 $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$，又 $e^x>0$，所以 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left[-\pi,-\frac{3\pi}{4}\right)$ 上单调递增；…………………………………… 2 分

②当 $-\frac{3\pi}{4}\leqslant x<-\frac{\pi}{2}$ 时，$-\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}<-\frac{3\pi}{4}$，因为 $f''(x)=e^x+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，且 $e^x<1$，$-\sqrt{2}\leqslant\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<-1$，所以 $f''(x)<0$，所以 $f'(x)$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，又 $f'\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=e^{-\frac{3\pi}{4}}>0$，$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}-1<0$，所以存在 $x_0\in\left(-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(x_0)=0$，且在 $\left(-\frac{3\pi}{4},x_0\right)$ 上，$f'(x)>0$，在 $\left(x_0,-\frac{\pi}{2}\right)$ 上，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{4},x_0\right)$ 上单调递增，在 $\left(x_0,-\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减；…………………………………… 3 分

③当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x<0$ 时，$-\frac{3\pi}{4}\leqslant x-\frac{\pi}{4}<-\frac{\pi}{4}$，所以 $-\sqrt{2}\leqslant\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant -1$，又 $e^x<1$，所以 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减；…………………………………… 4 分

④当 $0\leqslant x<\frac{\pi}{4}$ 时，$-\frac{\pi}{4}\leqslant x-\frac{\pi}{4}<0$，所以 $-1\leqslant\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<0$，$e^x\geqslant 1$，所以 $f'(x)\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增；…………………………………… 5 分

⑤当 $x\geqslant\frac{\pi}{4}$ 时，$x-\frac{\pi}{4}\geqslant 0$，$e^x\geqslant e^{\frac{\pi}{4}}>\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>-\sqrt{2}$，所以 $f'(x)>0$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},+\infty\right)$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},+\infty\right)$ 上单调递增. …………………………………… 6 分

综上所述，$f(x)$ 在 $[-\pi,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,0)$ 上单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $[-\pi,+\infty)$ 上仅有 2 个极值点. …………………………………… 7 分

(2) 当 $x\geqslant-\pi$ 时，$f'(x)\geqslant ax+2-2\cos x\,(a\in\mathbf{R})$ 恒成立，即 $e^x+\sin x+\cos x-ax-2\geqslant 0\,(a\in\mathbf{R})$，

令 $\varphi(x)=e^x+\cos x+\sin x-ax-2$，则 $\varphi(x)\geqslant 0$，

因为 $\varphi(x)\geqslant 0$ 且 $\varphi(0)=0$，所以当 $x=0$ 时，$\varphi(x)$ 取得最小值. …………………………………… 8 分

$\varphi'(x)=e^x-\sin x+\cos x-a$，

则 $x=0$ 为函数 $\varphi(x)$ 的极小值点，故 $\varphi'(0)=2-a=0$，解得 $a=2$. …………………………………… 9 分

下面证明：当 $a=2$ 时，$x=0$ 为函数 $\varphi(x)$ 的最小值点，$\varphi'(x)=e^x-\sin x+\cos x-2$.

令 $h(x)=e^x-\sin x+\cos x-2$，$h'(x)=e^x-\cos x-\sin x=f(x)$，

由(1)可知，$f(-\pi)=e^{-\pi}+1>0$，所以当 $x\geqslant-\pi$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(0)=0$，所以函数 $h'(x)\geqslant 0$ 在 $[-\pi,+\infty)$ 上恒成立，所以 $h(x)$（即 $\varphi'(x)$）在 $[-\pi,+\infty)$ 上单调递增，又 $\varphi'(0)=0$，所以当 $-\pi\leqslant x<0$ 时，$\varphi'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)>0$，

所以函数 $\varphi(x)$ 在 $[-\pi,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，…………………………………… 11 分

所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$，符合题意.

综上所述，$a=2$. …………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。