

高三数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合、常用逻辑用语、不等式、函数、导数、三角函数、三角恒等变换、解三角形、平面向量、复数。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $\frac{3+i}{z} = 1-i$ ，则 $|z| =$

- A. $\sqrt{5}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

2. 设集合 $A = \{x | y = \ln(x-3)\}$ ， $B = \{x | x \leq -1\}$ ，则 $\{x | -1 < x \leq 3\} =$

- A. $\complement_{\mathbb{R}}(A \cap B)$ B. $\complement_{\mathbb{R}}(A \cup B)$ C. $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B)$ D. $A \cup (\complement_{\mathbb{R}} B)$

3. 已知 $P(\sin \theta, \cos \theta)$ 是角 $-\frac{\pi}{3}$ 的终边上一点，则 $\tan \theta =$

- A. $-\sqrt{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

4. 已知平面向量 a, b 和实数 λ ，则“ $a = \lambda b$ ”是“ a 与 b 共线”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 扇子是引风用品，夏令必备之物。我国传统扇文化源远流长，是中华文化的一个组成部分。历史上最早的扇子是一种礼仪工具，后来慢慢演变为纳凉、娱乐、观赏的生活用品和工艺品。扇子的种类较多，受大众喜爱的有团扇和折扇。如图 1 是一把折扇，是用竹木做扇骨，用特殊纸或绫绢做扇面而制成的。完全打开后的折扇为扇形（如图 2），若图 2 中 $\angle AOB = \theta$ ， C, D 分别在 OA, OB 上， $AC = BD = m$ ， \widehat{AB} 的长为 l ，则该折扇的扇面 $ABDC$ 的面积为



图 1



图 2

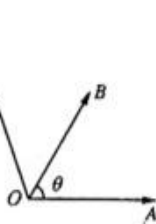
- A. $\frac{m(l-\theta)}{2}$ B. $\frac{m(l-\theta m)}{2}$ C. $\frac{m(2l-\theta)}{2}$ D. $\frac{m(2l-\theta m)}{2}$

6. 已知 $a = \left(\frac{3}{2}\right)^{-0.6}$, $b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4}$, $c = \left(\frac{2}{3}\right)^{0.9}$, 则

- A. $b > c > a$ B. $c > a > b$ C. $b > a > c$ D. $a > c > b$

7. 如图, 已知两个单位向量 \vec{OA} , \vec{OB} 和向量 \vec{OC} , $|\vec{OC}| = 2$. \vec{OA} 与 \vec{OB} 的夹角为 θ , 且 $\cos \theta = \frac{3}{5}$, \vec{OB} 与 \vec{OC} 的夹角为 45° , 若 $\vec{OC} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 则 $x + y =$

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$
C. 1 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$



8. 已知函数 $f(x) = (\ln x)^2 - \frac{a}{2}x \ln x + \frac{a}{e}x^2$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 则 a 的取值范围是

- A. $\left(-\frac{1}{e^2 - e}, 0\right)$ B. $\left(-\frac{1}{e^2}, 0\right)$ C. $\left(-\frac{1}{2e}, 0\right)$ D. $\left(-\frac{2}{e}, 0\right)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), x_1, x_2 为 $f(x)$ 的两个极值点, 且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$, 直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 则

- A. $\omega = 4$ B. $\varphi = -\frac{\pi}{6}$
C. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称 D. $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 对称

10. 下列式子中最小值为 4 的是

- A. $\sin^2 x + \frac{4}{\sin^2 x}$ B. $2^x + 2^{2-x}$
C. $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$ D. $4\ln(\sqrt{x^2+1}-x) + \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 其导函数为 $f'(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}, f(4+x) - f(-x) = 0$, 且 $f(x+1)$ 为奇函数, 若 $f'(1) = -1$, 则

- A. $f(1) = 0$ B. 4 为 $f(x)$ 的一个周期
C. $f'(2) = 1$ D. $f'(2023) = 1$

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , P 为 $\triangle ABC$ 内一点, 则下列命题正确的是

- A. 若 $\vec{PA} + 2\vec{PB} + 3\vec{PC} = \mathbf{0}$, 则 $\triangle PAC$ 的面积与 $\triangle PAB$ 的面积之比是 2 : 3
B. 若 $a = 3\sqrt{2}, b = 4, A = \frac{\pi}{4}$, 则满足条件的三角形有两个
C. 若 $\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AB}|} = -\frac{\vec{AC} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AC}|}$, 则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形
D. 若点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心, 且 $2a \cdot \vec{PA} + b \cdot \vec{PB} + \frac{2\sqrt{3}}{3}c \cdot \vec{PC} = \mathbf{0}$, 则 $\triangle ABC$ 为直角三角形



三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为_____。

14. $\tan 20^\circ + 4\sin 20^\circ =$ _____。

15. 函数 $y = \frac{\sin x - \cos x}{2 - \sin x \cos x}$ 的值域为_____。

16. 函数 $f(x) = (x^2 - 6x) \sin(x-3) + x + a$ ($x \in [0, 6]$) 的最大值为 M , 最小值为 m , 若 $M+m=8$, 则 $a =$ _____。

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知向量 $\mathbf{a} = (2\cos^2 x, \sin x)$, $\mathbf{b} = (\frac{1}{2}, \sqrt{3}\cos x)$, 函数 $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $A+B = \frac{7}{12}\pi$, $f(A) = 1$, $BC = 2\sqrt{3}$, 求边 AC 的长.

18. (本小题满分 12 分)

已知 $f(x) = \log_3(m^x + 1) - x$ ($m > 0$, 且 $m \neq 1$) 是偶函数.

(1) 求 m 的值;

(2) 若关于 x 的不等式 $\frac{1}{2} \cdot 3^{f(x)} - 3[(\sqrt{3})^x + (\sqrt{3})^{-x}] + a \leq 0$ 在 \mathbf{R} 上有解, 求实数 a 的最大整数值.

19. (本小题满分 12 分)

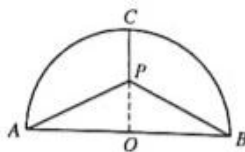
已知 $\sin \alpha$ 是方程 $5x^2 - 7x - 6 = 0$ 的根.

(1) 求 $\frac{\sin(-\alpha - \frac{3}{2}\pi) \cdot \cos(\frac{3}{2}\pi - \alpha) \cdot \cos(2\pi - \alpha) \cdot \tan(\pi - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$ 的值;

(2) 若 α 是第四象限角, $\sin(\beta - \frac{\pi}{6}) = \frac{5}{13}$ ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$), 求 $\sin(\beta - \alpha + \frac{\pi}{3})$ 的值.

20. (本小题满分 12 分)

南京玄武湖号称“金陵明珠”，是我国仅存的皇家园林湖泊。在玄武湖的一角有大片的荷花，每到夏季，荷花飘香，令人陶醉。夏天的一个傍晚，小胡和朋友游玄武湖，发现观赏荷花只能在岸边，无法深入其中，影响观赏荷花的乐趣，于是他便有了一个愿景：若在玄武湖一个盛开荷花的一角（该处岸边近似半圆形，如图所示）设计一些栈道和一个观景台，观景台 P 在半圆形的中轴线 OC 上（图中 OC 与直径 AB 垂直， P 与 O, C 不重合），通过栈道把 PA, PB, PC, AB 连接起来，使人行在其中，犹如置身花海之感。已知 $AB=200$ m, $\angle PAB=\theta$, 栈道总长度为函数 $f(\theta)$ 。



(1) 求 $f(\theta)$;

(2) 若栈道的造价为每米 5 万元，试确定观景台 P 的位置，使实现该愿景的建造费用最小（观景台的建造费用忽略不计），并求出实现该愿景的建造费用的最小值。

21. (本小题满分 12 分)

在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , S 为 $\triangle ABC$ 的面积，且 $a^2=2S+(b-c)^2$ 。

(1) 求 $\tan A$ 的值；

(2) 若 $a=8$, 证明: $16 < b+c \leq 8\sqrt{5}$ 。

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-\sin x-\cos x$, $f'(x)$ 为其导函数。

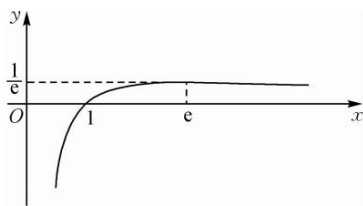
(1) 求 $f(x)$ 在 $[-\pi, +\infty)$ 上极值点的个数；

(2) 若 $f'(x) \geq ax+2-2\cos x (a \in \mathbf{R})$ 对 $\forall x \in [-\pi, +\infty)$ 恒成立，求 a 的值。



高三数学参考答案、提示及评分细则

1. A 由 $\frac{3+i}{z}=1-i$, 得 $z=\frac{3+i}{1-i}=\frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+4i}{2}=1+2i$, 所以 $|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. 故选 A.
2. B 由题意得 $A=\{x|x>3\}$, 所以 $A\cap B=\emptyset$, 则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=\mathbf{R}$, 故 A 错误; $A\cup B=\{x|x\leq-1, \text{ 或 } x>3\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x|-1<x\leq 3\}$, 故 B 正确; 又 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x>-1\}$, 所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|x>3\}$, 故 C 错误; $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|x>-1\}$, 故 D 错误. 故选 B.
3. B $\sin\theta=\cos(-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$, $\cos\theta=\sin(-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.
4. A 若 $a=\lambda b$, 由共线向量定理知 a 与 b 共线, 则“ $a=\lambda b$ ”是“ a 与 b 共线”的充分条件; 若 a 与 b 共线, 如 $a=(1,2)$, $b=(0,0)$, 则 $a=\lambda b$ 不成立, 故“ $a=\lambda b$ ”不是“ a 与 b 共线”的必要条件. 综上, “ $a=\lambda b$ ”是“ a 与 b 共线”的充分不必要条件. 故选 A.
5. D 由弧长公式可知, $l=\theta\cdot OA$, 所以 $OA=\frac{l}{\theta}$, 则 $OC=\frac{l}{\theta}-m$, 所以该折扇的扇面的面积为 $\frac{1}{2}l\cdot\frac{l}{\theta}-\frac{1}{2}\theta\cdot(\frac{l}{\theta}-m)^2=\frac{m(2l-m\theta)}{2}$. 故选 D.
6. C $1=(\frac{3}{2})^0>(\frac{3}{2})^{-0.6}=(\frac{2}{3})^{0.6}>(\frac{2}{3})^{0.9}$, 即 $1>a>c$, 又 $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}=\log_3 4>1$, 所以 $b>a>c$. 故选 C.
7. D 由 $\cos\theta=\frac{3}{5}$, $\theta\in[0,\pi]$, 得 $\sin\theta=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$. 由题意, 得 $\vec{OB}\cdot\vec{OC}=1\times 2\cos 45^\circ=\sqrt{2}$, $\vec{OA}\cdot\vec{OC}=1\times 2\cos(\theta+45^\circ)=-\frac{\sqrt{2}}{5}$, $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=\frac{3}{5}$, 在 $\vec{OC}=x\vec{OA}+y\vec{OB}$ 两边分别点乘 \vec{OA} , \vec{OB} , 得 $\vec{OA}\cdot\vec{OC}=x+\frac{3}{5}y$, $\vec{OB}\cdot\vec{OC}=\frac{3}{5}x+y$, 两式相加, 得 $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{5}=\frac{8}{5}(x+y)$, 所以 $x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 D.
8. D 由题意知 $x>0$, 所以 $f(x)=0$ 可化为 $(\frac{\ln x}{x})^2-\frac{a}{2}\cdot\frac{\ln x}{x}+\frac{a}{e}=0$, 令 $u=g(x)=\frac{\ln x}{x}$, 则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, 所以当 $0<x<e$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增; 当 $x>e$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$, 又 $x\rightarrow 0$ 时, $g(x)\rightarrow -\infty$, $x\rightarrow +\infty$ 时, $g(x)\rightarrow 0$, 故 $g(x)$ 的值域为 $(-\infty, \frac{1}{e}]$, 且其图象如图所示.



则问题转化为 $h(u)=u^2-\frac{a}{2}u+\frac{a}{e}$ 的零点: ①一个在 $(0, \frac{1}{e})$ 内, 另一个为 $\frac{1}{e}$, 则

$$\begin{cases} \Delta > 0, \\ h(0) > 0, \\ h(\frac{1}{e}) = 0, \\ 0 < \frac{a}{4} < \frac{1}{e}, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \frac{a^2-4a}{4} > 0, \\ \frac{a}{e} > 0, \\ \frac{1}{e^2}-\frac{a}{2e}+\frac{a}{e}=0, \\ 0 < a < \frac{4}{e}, \end{cases} \text{ 无}$$

解. ②一个在 $(0, \frac{1}{e})$ 内, 另一个在 $(-\infty, 0]$ 内, 若 $h(0) = 0$, 则 $a = 0, h(u) = u^2$, 函数 $h(u)$ 有一个零点, 不合题意, 则

$$\begin{cases} h(0) < 0, \\ h(\frac{1}{e}) > 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \frac{a}{e} < 0, \\ \frac{1}{e^2} - \frac{a}{2e} + \frac{a}{e} > 0, \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{2}{e} < a < 0. \text{ 故选 D.}$$

9. BD 因为 x_1, x_2 为 $f(x)$ 的两个极值点, 且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$, 所以 $f(x)$ 的周期 $T = \pi$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$, 故 A 错误; 又 $x = \frac{\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 所以 $\frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 即 $\varphi = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, 故 B 正确; 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得 $g(x) = \sin 2x$, 所以 $f(-\frac{\pi}{6}) = \sin(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = -1 \neq 0, g(\frac{\pi}{2}) = \sin \pi = 0$, 故 C 错误, D 正确. 故选 BD.

10. BC $\sin^2 x + \frac{4}{\sin^2 x} \geq 2\sqrt{\sin^2 x \times \frac{4}{\sin^2 x}} = 4$, 当且仅当 $\sin^2 x = \frac{4}{\sin^2 x}$, 即 $\sin^2 x = 2$ 时等号成立, 因为 $|\sin x| \leq 1$, 所以 $\sin^2 x = 2$ 不成立, 故 $\sin^2 x + \frac{4}{\sin^2 x}$ 的最小值不是 4; $2^x + 2^{2-x} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{2-x}} = 4$, 当且仅当 $2^x = 2^{2-x}$, 即 $x = 1$ 时等号成立, 故 $2^x + 2^{2-x}$ 的最小值为 4; $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = (\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x})(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \geq 4$, 当且仅当 $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$, 即 $|\sin x| = |\cos x|$ 时等号成立, 故 $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$ 的最小值为 4; 因为当 $x = 0$ 时, $4\ln(\sqrt{x^2+1}-x) + \ln(\sqrt{x^2+1}+x) = 0$, 所以 $4\ln(\sqrt{x^2+1}-x) + \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 的最小值不为 4. 故选 BC.

11. ABD 法一: 因为 $f(x+1)$ 为奇函数, 所以 $f(-x+1) = -f(x+1)$, 则 $f(1) = 0$, 所以 $f(-x) = -f(2+x)$, 又 $f(4+x) - f(-x) = 0$, 所以 $f(x+4) = -f(x+2)$, 即 $f(x+2) = -f(x)$, 所以 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$, 即 $f(x)$ 的一个周期为 4, 故 A, B 正确; 由 $f(x+2) = -f(x)$ 两边求导, 得 $f'(x+2) = -f'(x)$. 因为 $f(-x+1) = -f(x+1)$, 两边求导, 得 $f'(-x+1) \cdot (-1) = -f'(x+1)$, 即 $f'(-x+1) = f'(x+1)$, 所以 $f'(x) = f'(2-x)$, 又 $f(4+x) - f(-x) = 0$, 两边求导, 得 $f'(4+x) + f'(-x) = 0$, 所以 $f'(2) = 0$. 由 $f(x+4) = f(x)$ 两边求导得 $f'(x+4) = f'(x)$, 故 $f'(x)$ 的一个周期为 4, 所以 $f'(2023) = f'(-1) = -f'(1) = 1$, 故 C 错误, D 正确. 故选 ABD.

法二: 由法一, 得 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 和 $x = 2$ 对称, 且周期为 4, $f'(1) = -1$, 取 $f(x) = \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x$, 则 $f'(x) = \frac{2}{\pi} \cdot (-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}x) = -\sin \frac{\pi}{2}x$, 于是 $f(1) = \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} = 0, f'(2) = 0, f'(2023) = -\sin \frac{2023\pi}{2} = 1$, 故 ABD 正确, C 错误. 故选 ABD.

12. ACD 对于选项 A, 由 $\vec{PA} + 2\vec{PB} + 3\vec{PC} = \mathbf{0}$, 得 $\vec{PA} + \vec{PC} = -2(\vec{PB} + \vec{PC})$, 分别取 AC, BC 的中点 D, E, 则 $\vec{PD} = -2\vec{PE}$, 所以 $\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle PAB}} = \frac{2S_{\triangle PAD}}{S_{\triangle PAB}} = \frac{2}{3}$, 故 A 正确; 对于选项 B, $a = 3\sqrt{2} > b$, 则 $A = \frac{\pi}{4} > B$, 所以 $\triangle ABC$ 是以角 C 为钝角的钝角三角形, 故 B 错误; 对于选项 C, 由 $\frac{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AB}|} = -\frac{\vec{AC} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AC}|}$, 得 $(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}) \cdot \vec{BC} = 0$. 易知 $\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$ 与 $\angle BAC$ 的角平分线共线, 所以 $\angle BAC$ 的角平分线与 BC 垂直, 故 $AB = AC$, $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 故 C 正确; 对于选项 D, 因为点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 $\vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}), \vec{BP} = \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{BC}), \vec{CP} = \frac{1}{3}(\vec{CB} + \vec{CA})$, 代入条件并整理, 得 $-\frac{1}{3} \cdot [(2a-b)\vec{AB} + (2a-\frac{2\sqrt{3}c}{3})\vec{AC} + (b-\frac{2\sqrt{3}c}{3})\vec{BC}] = \mathbf{0}$, 即 $(2a-b)\vec{AB} + (2a-\frac{2\sqrt{3}c}{3})\vec{AC} + (b-\frac{2\sqrt{3}c}{3})\vec{BC} = \mathbf{0}$. 又 $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$, 代入并整理, 得 $(2a-2b+\frac{2\sqrt{3}c}{3})\vec{AB} + (2a+b-\frac{4\sqrt{3}c}{3})\vec{AC} = \mathbf{0}$, 因为 \vec{AB}, \vec{AC} 不共线, 所以

$$\begin{cases} 2a-2b+\frac{2\sqrt{3}c}{3}=0, \\ 2a+b-\frac{4\sqrt{3}c}{3}=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} b=2a, \\ c=\sqrt{3}a. \end{cases} \text{所以 } a^2+c^2=4a^2=b^2, \text{故 } B \text{ 为直角, 所以 } \triangle ABC \text{ 为直角三角形, 故 D 正确.}$$

选 ACD.

13. $2x-y-1=0$ $f'(x)=\frac{e^x-(x-1)e^x}{(e^x)^2}=\frac{2-x}{e^x}$, 所以 $f'(0)=2$, 又 $f(0)=-1$, 故所求切线方程为 $y-(-1)=2(x-0)$, 即 $2x-y-1=0$.

14. $\sqrt{3} \tan 20^\circ + 4 \sin 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + 4 \sin 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ + 4 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ + 2 \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ + 2 \sin (60^\circ - 20^\circ)}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ + \sqrt{3} \cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sqrt{3}$.

15. $\left[-\frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right]$ 令 $t = \sin x - \cos x$, 则 $\sin x \cos x = \frac{1-t^2}{2}$ ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$), 所以 $y = \frac{2t}{3+t^2}$ ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$), 当 $t=0$ 时, $y=0$, 当 $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$, 且 $t \neq 0$ 时, $y = \frac{2}{t + \frac{3}{t}}$, 令 $u = t + \frac{3}{t}$, 易知 u 的值域为 $(-\infty, -\frac{5\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{5\sqrt{2}}{2}, +\infty)$, 所以 y 的

取值范围为 $\left[-\frac{2\sqrt{2}}{5}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right]$. 综上所述, 所求函数的值域为 $\left[-\frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right]$.

16. 1 $f(x) = (x^2 - 6x) \sin(x-3) + x + a = [(x-3)^2 - 9] \sin(x-3) + x + a$, 令 $t = x-3$ ($t \in [-3, 3]$), 则原函数变为 $y = (t^2 - 9) \sin t + t + 3 + a$, 令 $g(t) = (t^2 - 9) \sin t + t$ ($t \in [-3, 3]$), 所以 $y = g(t) + 3 + a$, 所以 $M = g(t)_{\max} + 3 + a$, $m = g(t)_{\min} + 3 + a$, 所以 $M + m = g(t)_{\max} + g(t)_{\min} + 6 + 2a$. 因为 $g(-t) = -g(t)$, 所以 $g(t)$ 为奇函数, 所以 $g(t)_{\max} + g(t)_{\min} = 0$, 所以 $M + m = 6 + 2a = 8$, 解得 $a = 1$.

17. 解: (1) 由题意得 $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$, 2分

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 3分

令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), 解得 $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), 4分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right]$ ($k \in \mathbf{Z}$). 5分

(2) 由(1)知 $f(A) = \sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} = 1$,

所以 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $2A + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right)$, 所以 $2A + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 7分

因为 $A + B = \frac{7}{12}\pi$, 所以 $B = \frac{\pi}{4}$, 8分

由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$, 所以 $AC = \frac{BC \sin B}{\sin A} = \frac{2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{2}$ 10分

18. 解: (1) 因为 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f(x) = f(-x)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

即 $\log_3(m^{-x} + 1) + x = \log_3(m^x + 1) - x$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 2分

又 $\log_3(m^{-x} + 1) = \log_3 \frac{m^x + 1}{m^x} = \log_3(m^x + 1) - \log_3 m^x = \log_3(m^x + 1) - x \log_3 m$,

所以 $\log_3(m^x + 1) - x \log_3 m + x = \log_3(m^x + 1) - x$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 4分

即 $x(\log_3 m - 2) = 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

必须 $\log_3 m - 2 = 0$, 即 $m = 9$.

故 $m=9$ 6分

(2)由(1)知, $f(x)=\log_3(9^x+1)-x$,

故 $3^{f(x)}=3^{\log_3(9^x+1)-x}=3^x+\frac{1}{3^x}$ 7分

设 $t=(\sqrt{3})^x+(\sqrt{3})^{-x}(t\geq 2)$, 则 $t^2=3^x+\frac{1}{3^x}+2$, 即 $3^x+\frac{1}{3^x}=t^2-2$,

所以原问题等价于关于 t 的不等式 $\frac{1}{2}t^2-3t+a-1\leq 0$ 在 $[2, +\infty)$ 上有解,

所以 $a\leq \left(-\frac{1}{2}t^2+3t+1\right)_{\max}$ 9分

又 $y=-\frac{1}{2}t^2+3t+1=-\frac{1}{2}(t-3)^2+\frac{11}{2}, t\in[2, +\infty)$, 10分

所以当 $t=3$ 时, $y_{\max}=\frac{11}{2}$,

所以 $a\leq \frac{11}{2}$, 故实数 a 的最大整数值为 5. 12分

19. 解:(1)由 $\sin\alpha$ 是方程 $5x^2-7x-6=0$ 的根, 可得 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ 或 $\sin\alpha=2$ (舍), 1分

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\times\cos\alpha\times(-\tan\alpha)}{\sin\alpha\times(-\sin\alpha)} = \frac{\cos\alpha(-\sin\alpha)\cos\alpha(-\tan\alpha)}{-\sin^2\alpha} \\ &= \frac{\cos\alpha\sin^2\alpha}{-\sin^2\alpha} = -\cos\alpha. \end{aligned} \dots\dots 3分$$

由 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, 知 α 是第三象限角或第四象限角,

若 α 是第三象限角, 则 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, 此时 $-\cos\alpha=\frac{4}{5}$; 4分

若 α 是第四象限角, 则 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, 此时 $-\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ 5分

故所求式子的值为 $\frac{4}{5}$ 或 $-\frac{4}{5}$ 6分

(2)由(1)知, 当 α 是第四象限角时, $\sin\alpha=-\frac{3}{5}, \cos\alpha=\frac{4}{5}$, 7分

由 $\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{13}(0<\beta<\frac{\pi}{2})$, 得 $\cos\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{12}{13}$, 8分

所以 $\sin\left(\beta-\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\left(\beta-\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left[\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)-\alpha\right]$ 10分

$=\cos\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)\cos\alpha+\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)\sin\alpha=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}+\frac{5}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{33}{65}$ 12分

20. 解:(1)由题意知 $\angle PAB=\theta(0<\theta<\frac{\pi}{4}), OC\perp AB, OA=OB=100$, 1分

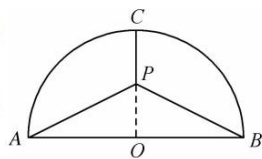
则 $PA=PB=\frac{100}{\cos\theta}, PO=100\tan\theta$, 所以 $PC=100-100\tan\theta$, 3分

所以 $f(\theta)=PA+PB+PC+AB=\frac{200}{\cos\theta}+100-100\tan\theta+200=100\left(\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}+3\right)(0<\theta<\frac{\pi}{4})$ 4分

(2)建造栈道的费用 $F(\theta)=5f(\theta)=500\left(\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}+3\right)$, 5分

$F'(\theta)=500\times\frac{2\sin\theta-1}{\cos^2\theta}$, 6分

令 $F'(\theta)=0$, 得 $\sin\theta=\frac{1}{2}$, 又 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$, 所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 7分



当 $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ 时, $F'(\theta) < 0$, 当 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{4}$ 时, $F'(\theta) > 0$,

所以 $F(\theta)$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上单调递减, 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ 上单调递增, 9 分

所以 $F(\theta)_{\min} = F(\frac{\pi}{6}) = 500(3 + \sqrt{3})$, 此时 $PC = 100 - 100 \tan \frac{\pi}{6} = 100 - \frac{100\sqrt{3}}{3}$, 11 分

故观景台位于离岸边半圆弧中点的距离为 $(100 - \frac{100\sqrt{3}}{3})$ 米时, 建造费用最小, 最小费用为 $500(3 + \sqrt{3})$ 万元.

..... 12 分

21. (1) 解: 因为 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$, $2S = a^2 - (b-c)^2$,

所以 $bc \sin A = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$, 1 分

由余弦定理, 得 $a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos A$, 2 分

所以 $bc \sin A = 2bc - 2bc \cos A$, 因为 $bc \neq 0$,

所以 $\sin A + 2 \cos A = 2$ 3 分

又 $A \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, 所以 $\sin A + 2 \sqrt{1 - \sin^2 A} = 2$, 4 分

化简得 $5 \sin^2 A - 4 \sin A = 0$, 解得 $\sin A = \frac{4}{5}$ 或 $\sin A = 0$ (不合题意, 舍去), 5 分

因为 $A \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{3}{5}$, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{4}{3}$ 6 分

(2) 证明: 由正弦定理, 得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{8}{\frac{4}{5}} = 10$,

所以 $b = 10 \sin B$, $c = 10 \sin C = 10 \sin(A+B)$, 7 分

所以 $b+c = 10 \sin B + 10 \sin(A+B) = 16 \sin B + 8 \cos B = 8\sqrt{5} \sin(B+\varphi)$, 其中 φ 为锐角, 且 $\sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

..... 8 分

因为 $A \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $-\frac{\pi}{2} < A - \varphi < \frac{\pi}{2}$,

又 $\sin A > \sin \varphi$, 所以 $A > \varphi$, 所以 $0 < A - \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 < \frac{\pi}{2} - A + \varphi < \frac{\pi}{2}$, 9 分

又 $\begin{cases} 0 < C < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < B < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 0 < \pi - A - B < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < B < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} \frac{\pi}{2} - A < B < \pi - A, \\ 0 < B < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$

所以 $\frac{\pi}{2} - A < B < \frac{\pi}{2}$ 10 分

所以 $\frac{\pi}{2} - A + \varphi < B + \varphi < \frac{\pi}{2} + \varphi$,

因为函数 $y = \sin x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减,

且 $\sin(\frac{\pi}{2} - A + \varphi) = \cos(\varphi - A) = \cos \varphi \cos A + \sin \varphi \sin A = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\sin(\frac{\pi}{2} + \varphi) = \cos \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

所以 $8\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} < 8\sqrt{5} \sin(B+\varphi) \leq 8\sqrt{5}$, 即 $16 < b+c \leq 8\sqrt{5}$ 12分

22. 解: (1) $f'(x) = e^x - \cos x + \sin x = e^x + \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$, 1分

①当 $-\pi \leq x < -\frac{3\pi}{4}$ 时, $-\frac{5\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} < -\pi$, 所以 $\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) > 0$, 又 $e^x > 0$, 所以 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[-\pi, -\frac{3\pi}{4}]$ 上单调递增; 2分

②当 $-\frac{3\pi}{4} \leq x < -\frac{\pi}{2}$ 时, $-\pi \leq x - \frac{\pi}{4} < -\frac{3\pi}{4}$, 因为 $f''(x) = e^x + \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$, 且 $e^x < 1$, $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) < -1$, 所以 $f''(x) < 0$, 所以 $f'(x)$ 在 $[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 又 $f'(-\frac{3\pi}{4}) = e^{-\frac{3\pi}{4}} > 0$, $f'(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} - 1 < 0$, 所以存在 $x_0 \in (-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 且在 $(-\frac{3\pi}{4}, x_0)$ 上, $f'(x) > 0$, 在 $(x_0, -\frac{\pi}{2})$ 上, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[-\frac{3\pi}{4}, x_0]$ 上单调递增, 在 $(x_0, -\frac{\pi}{2})$ 上单调递减; 3分

③当 $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$ 时, $-\frac{3\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} < -\frac{\pi}{4}$, 所以 $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) \leq -1$, 又 $e^x < 1$, 所以 $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0)$ 上单调递减; 4分

④当 $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ 时, $-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} < 0$, 所以 $-1 \leq \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) < 0$, $e^x \geq 1$, 所以 $f'(x) \geq 0$, 当且仅当 $x=0$ 时取等号, 所以 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{4})$ 上单调递增; 5分

⑤当 $x \geq \frac{\pi}{4}$ 时, $x - \frac{\pi}{4} \geq 0$, $e^x \geq e^{\frac{\pi}{4}} > \sqrt{2}$, $\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) > -\sqrt{2}$, 所以 $f'(x) > 0$ 在 $(\frac{\pi}{4}, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{4}, +\infty)$ 上单调递增. 6分

综上所述, $f(x)$ 在 $[-\pi, x_0]$ 上单调递增, 在 $(x_0, 0)$ 上单调递减, 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $[-\pi, +\infty)$ 上仅有 2 个极值点. 7分

(2) 当 $x \geq -\pi$ 时, $f'(x) \geq ax + 2 - 2\cos x (a \in \mathbf{R})$ 恒成立, 即 $e^x + \sin x + \cos x - ax - 2 \geq 0 (a \in \mathbf{R})$, 令 $\varphi(x) = e^x + \cos x + \sin x - ax - 2$, 则 $\varphi(x) \geq 0$, 因为 $\varphi(x) \geq 0$ 且 $\varphi(0) = 0$, 所以当 $x=0$ 时, $\varphi(x)$ 取得最小值. 8分

$\varphi'(x) = e^x - \sin x + \cos x - a$, 则 $x=0$ 为函数 $\varphi(x)$ 的极小值点, 故 $\varphi'(0) = 2 - a = 0$, 解得 $a=2$ 9分

下面证明: 当 $a=2$ 时, $x=0$ 为函数 $\varphi(x)$ 的最小值点, $\varphi'(x) = e^x - \sin x + \cos x - 2$. 令 $h(x) = e^x - \sin x + \cos x - 2$, $h'(x) = e^x - \cos x - \sin x = f(x)$,

由(1)可知, $f(-\pi) = e^{-\pi} + 1 > 0$, 所以当 $x \geq -\pi$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $f(0) = 0$, 所以函数 $h'(x) \geq 0$ 在 $[-\pi, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $h(x)$ (即 $\varphi'(x)$) 在 $[-\pi, +\infty)$ 上单调递增, 又 $\varphi'(0) = 0$, 所以当 $-\pi \leq x < 0$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $\varphi'(x) > 0$,

所以函数 $\varphi(x)$ 在 $[-\pi, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 11分 所以 $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$, 符合题意.

综上所述, $a=2$ 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

