

绝密★启用前

焦作市普通高中 2023—2024 学年(上)高二年级期中考试

数 学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{-3, -2, 1, 3\}$, $B = \{x \mid 3^x < \frac{1}{9}\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{-3, -2\}$ B. $\{-3\}$ C. $\{3\}$ D. $\{1, 3\}$

2. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的一条渐近线与直线 $x - 3y - 2 = 0$ 平行, 则 $b =$

- A. 36 B. $4\sqrt{2}$ C. 6 D. $\frac{2}{3}$

3. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $z_1 = \frac{a-i}{1+i}$ 与 $z_2 = b-3i$ 是共轭复数, 则 $a =$

- A. -7 B. -4 C. 2 D. 5

4. 图 1 所示的明矾晶体可近似看作一个正八面体 $P-ABCD-Q$ (图 2), 其中 $P-ABCD$, $Q-ABCD$ 均为所有棱长都相等的正四棱锥, 若 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AP} = \mathbf{c}$, 则 $\overrightarrow{PQ} =$



图 1

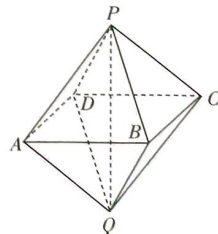


图 2

- A. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$
C. $-\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$

- B. $2\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$
D. $\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$

5. 已知直线 $l: y = 2x$ 与圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 4ay + 1 = 0 (a \neq 0)$ 交于 A, B 两点, 且点 C 到直线 l 的距离等于 $|AB|$, 则 a 的值为

- A. 1
B. $2\sqrt{5} + 4$
C. 1 或 $-\frac{1}{3}$
D. $2\sqrt{5} + 4$ 或 $2\sqrt{5} - 4$

6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的右焦点为 F , 点 $E(0, 2)$, 点 P 是 C 上的动点, 则 $|PF| + |PE|$ 的最小值为

- A. 5
B. $10 - 2\sqrt{5}$
C. 10
D. $10 + 2\sqrt{5}$

7. 已知点 $A(-3, 0), B(3, 0)$, 若在直线 l 上有唯一点 P 满足 $PA \perp PB$, 且有唯一点 Q 满足 $|QA| = 2|QB|$, 则符合条件的 l 有

- A. 4 条
B. 3 条
C. 2 条
D. 1 条

8. 已知正六边形 $ABCDEF$, 把四边形 $ABCD$ 沿直线 AD 翻折, 使得点 B, C 到达 B_1, C_1 且二面角 $B_1 - AD - E$ 的平面角为 120° . 若点 A, B_1, C_1, D, E, F 都在球 O_1 的表面上, 点 O_1, B_1, C_1, E, F 都在球 O_2 的表面上, 则球 O_2 与球 O_1 的表面积之比为

- A. $\frac{3}{4}$
B. $\frac{4}{3}$
C. $\sqrt{3}$
D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1 (a > 0)$, 当 a 变动时, 下列结论正确的是

- A. C 的焦点恒在 x 轴上
B. C 的焦距恒大于 4
C. C 的离心率恒大于 2
D. C 的一个焦点到其中一条渐近线的距离不变

10. 已知在平面直角坐标系中, 点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是不重合的两点, 则下列结论错误的是

- A. 直线 AB 的方程为 $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
B. 若 $2x_1 - y_1 - 1 = 0, 2x_2 - y_2 - 1 = 0$, 则直线 AB 的方程为 $2x - y - 1 = 0$
C. 若 $3x_1 - y_1 - 1 = 0, 3x_2 - y_2 + 4 = 0$, 则 $|AB|$ 的值可以是 $\sqrt{2}$
D. 若 $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 4, \frac{y_1}{x_1 - 3} = \frac{y_2}{x_2 - 3}$, 且 $|AB|$ 是定值, 则直线 AB 有 2 条

11. 已知空间直角坐标系 $O - xyz$ 中, 点 $A(1, 0, 1), B(-1, -1, 2), C(0, 1, 2)$, 则下列结论正确的是

- A. 直线 AB 的一个方向向量的坐标为 $(2, 1, -1)$
B. 直线 AC 与平面 xOy 的交点坐标为 $(2, 1, 0)$
C. 点 B 关于平面 yOz 的对称点为 $B'(1, -1, 2)$
D. $\angle BAC$ 为钝角

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{\cos x}, & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ \cos x, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$, 则下列结论正确的是

- A. $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增
- B. 若 $f(\alpha) = 1$, 则 $\cos \alpha$ 有 2 个不同的取值
- C. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 对称
- D. 若 $f(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 上有且仅有 10 个零点, 则 x_0 的取值范围是 $(5\pi, \frac{11\pi}{2})$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若函数 $f(x) = \log_3(9^x + 1) + (ax + 3)^2$ 是偶函数, 则实数 $a =$ _____.

14. 已知点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 1)$, $B(-1, 0, 2)$, 则 $\triangle OAB$ 的面积为 _____.

15. 著名数学家笛卡尔曾经给出一个四圆相切的定理: 半径分别为 r_1, r_2, r_3 的三个圆两两外切, 同时又都与半径为 r_4 的圆外切, 则 $2\left(\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{r_1 r_4} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_2 r_4} + \frac{1}{r_3 r_4}\right) = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2}$. 已知 $O_1(-2, 0)$, $O_2(2, 0)$, $O_3(0, \frac{3}{2})$, 若圆 O_1, O_2, O_3 两两外切, 且都与圆 O_4 外切, 其中圆 O_1, O_2 的半径相等, 则圆 O_4 的标准方程为 _____.

16. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$ 交于点 A, B , 直线 AB 与 x 轴的交点既是 C_1 的右焦点, 也是 C_2 的焦点, 点 A, B 关于原点的对称点分别为 A', B' , 点 P 是 C_1 上与 A, A', B, B' 均不重合的点, 记直线 PA, PA' 的斜率分别为 k, k' , 则 $kk' - \frac{4}{kk'} =$ _____.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

某沙漠地区每年有 2 个月属于雨季, 10 个月属于旱季. 经过初步治理该沙漠地区某年旱季的月降水量 (单位: mm) 依次达到 12.1, 12.0, 10.4, 10.5, 12.5, 14.1, 14.3, 14.3, 16.7, 18.1. 记这组数据的第 40 百分位数与平均数分别为 $m, \bar{x}$.

(I) 求 $m, \bar{x}$;

(II) 已知雨季的月降水量均大于旱季的月降水量, 该沙漠地区人工种植了甲、乙两种植物, 当月降水量低于 12.0 mm 时甲种植物需要浇水, 当月降水量低于 15.0 mm 时乙种植物需要浇水, 求这一年的某月甲、乙两种植物都需要浇水的概率及二者中有植物需要浇水的概率.

18. (12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F(-2, 0)$, 直线 $l: x = 3$, 动点 $P(x, y) (x \leq 0)$ 到 l 的距离等于 $|PF| + 1$. 设动点 P 的轨迹为曲线 C .

(I) 求 C 的方程;

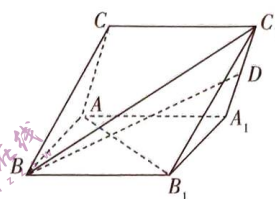
(II) 若直线 $x = my - 4$ 与曲线 C 交于 A, B 两点, 证明: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 为定值.

19. (12 分)

如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧面 ABB_1A_1 与侧面 ACC_1A_1 都是菱形, $AA_1 = AB_1 = 2$, $\angle BAC = \angle AA_1C_1 = 120^\circ$. 记 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$.

(I) 用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示 $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, 并证明 $BC_1 \perp AB_1$;

(II) 若 D 为棱 A_1C_1 的中点, 求线段 BD 的长.



20. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 BC 边上一点, $BD = 2AD$, $AD = 2DC$.

(I) 求证: $5AB^2 + 20AC^2 = 8BC^2$;

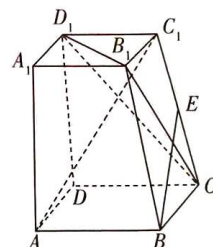
(II) 若 $\angle BAC$ 是锐角, $\angle BAD = \angle CAD$, 且 $AB + AC = 5$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{48}{25}$, 求 $\sin B$.

21. (12 分)

如图, 在四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, $AA_1 = 5$, $A_1B_1 = 3$, $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, E 为 CC_1 的中点.

(I) 求直线 AC_1 与平面 B_1CD_1 所成角的正弦值;

(II) 若平面 α 经过 BE 且与 AC_1 平行, 求点 B_1 到平面 α 的距离.



22. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过 $A_1(\sqrt{2}, 0)$, $A_2(\sqrt{2}, 1)$, $A_3(\sqrt{2}, -1)$, $A_4(0, \sqrt{2})$ 中的 3 个点.

(I) 求 C 的方程.

(II) 若直线 $x = ty + \sqrt{2} (t \neq 0)$ 与 C 交于点 M, N , 点 M 关于 x 轴的对称点为 M' , 点 D 是 $\triangle MNM'$ 的外接圆圆心, 判断在 x 轴上是否存在定点 P , 使得 $\frac{|DP|}{|MN|}$ 为定值. 若存在, 求

出点 P 的坐标及 $\frac{|DP|}{|MN|}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.