

# 数学

全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟

注意事项：

- 1.答卷前，考生务必将自己的姓名，准考证号填写在答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
- 2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
- 3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并收回.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合  $A = \{x | 3^x < 27, x \in \mathbf{N}\}$ ， $B = \{x \in \mathbf{Z} | -2 < x < 2\}$ ，则  $A \cup B =$

- A.  $\{-1, 0, 1, 2\}$       B.  $\{0, 1, 2\}$       C.  $\{0, 1\}$       D.  $\{x | -2 < x < 3\}$

2. 已知复数  $z$  满足  $z(3-4i) = 4-2i$ ，则  $|\bar{z}| =$

- A.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$       B.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$       C.  $\frac{1}{5}$       D.  $\frac{4}{5}$

3. 若圆锥的母线长为 6，其侧面展开图的面积为  $12\pi$ ，则这个圆锥的体积为

- A.  $24\pi$       B.  $8\pi$       C.  $16\sqrt{2}\pi$       D.  $\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$

4. 已知函数  $f(x) = ax + 2 \cos x (a \in \mathbf{R})$ ，则“ $a > 2$ ”是“ $f(x)$ 在区间  $(\pi, +\infty)$ 上单调递增”的

- A. 必要不充分条件      B. 充分不必要条件      C. 充要条件      D. 既不充分又不必要条件

5. 设  $a = \log_{0.5} 0.6$ ， $b = 0.25^{-0.3}$ ， $c = 0.6^{-0.6}$ ，则  $a, b, c$  的大小关系是

- A.  $b > a > c$       B.  $c > b > a$       C.  $b > c > a$       D.  $c > a > b$

6. 若  $\alpha \in (0, \pi)$ ，且  $\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha = \frac{8}{5}$ ，则  $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{12}\right)$  的值为

- A.  $-\frac{31\sqrt{2}}{50}$       B.  $\frac{31\sqrt{2}}{50}$       C.  $-\frac{17\sqrt{2}}{50}$       D.  $\frac{17\sqrt{2}}{50}$

7. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且  $S_n + a_n = 1$ ，设  $b_n = \frac{n-\lambda}{a_n}$ ，若数列  $\{b_n\}$  是递增数列，则  $\lambda$  的取值范围

是

- A.  $(-\infty, 2)$       B.  $(2, +\infty)$       C.  $(-\infty, 3)$       D.  $(3, +\infty)$

8. 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$  是边  $BC$  的中点, 且  $AD = 4$ , 点  $E$  满足  $\overrightarrow{BE} = \sin^2 \theta \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \cdot \overrightarrow{BC} (\theta \in \mathbf{R})$ , 则  $(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}) \cdot \overrightarrow{EA}$  的最小值为

- A. -10                      B. -8                      C. -6                      D. -4

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

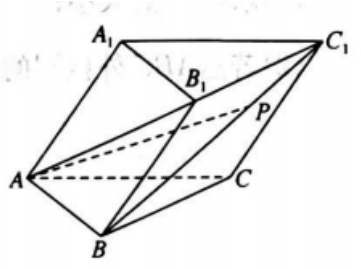
9. 已知  $m, n, l$  是三条不重合的直线,  $\alpha, \beta$  是两个不重合的平面, 则下列说法正确的是

- A. 若  $\alpha // \beta, m \subset \alpha$ , 则  $m // \beta$   
 B. 若  $m \subset \alpha, n \subset \beta, \alpha // \beta$ , 则  $m // n$   
 C. 若  $m // n, m \perp \alpha$ , 则  $n \perp \alpha$   
 D. 若  $m, n$  是异面直线,  $m // \alpha, n // \alpha, l \perp m$  且  $l \perp n$ , 则  $l \perp \alpha$

10. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $2S_5, 3S_7, 4S_9$  成等差数列, 则数列  $\{a_n\}$  的公比可能为

- A. 1                      B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $-\frac{1}{2}$                       D. -1

11. 如图, 在三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $\angle BAC = 90^\circ, \angle BAA_1 = \angle CAA_1 = 60^\circ, AB = AC = AA_1 = 1, P$  是线段  $BC_1$  上的点, 且  $BP = 2PC_1$ , 则下列说法正确的是



- A.  $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AA_1}$                       B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC_1} = -\frac{1}{2}$   
 C.  $AP = \frac{\sqrt{15}}{3}$                       D. 直线  $AB_1$  与  $BC_1$  所成角的余弦值为  $\frac{1}{6}$

12. 已知函数  $f(x)$  及其导函数  $f'(x)$  的定义域均为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(x) - f(-x) = 4x, f'(1+x) = f'(1-x)$ , 则下列说法正确的是

- A. 函数  $y = f(x) - 2x$  为偶函数                      B.  $f'(x)$  的图象关于直线  $x = -1$  对称  
 C.  $f'(2022) = 4$                       D.  $\sum_{i=1}^{199} f' \left( \frac{i}{50} \right) = 398$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若命题 “ $\exists x \in \mathbf{R}, (a^2 - 1)x^2 + (a - 1)x - 1 \geq 0$ ” 为假命题，则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

14. 已知函数  $y = 2 \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{5}\right)$  ( $\omega > 0$ ) 的图象与  $y = -2$  的图象的两相邻公共点间的距离为  $\pi$ ，将

$y = 2 \sin(\omega x)$  的图象向左平移  $\varphi$  ( $\varphi > 0$ ) 个单位长度得到  $y = 2 \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{5}\right)$  的图象，则  $\varphi$  的最小值为\_\_\_\_\_.

15. 记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，已知  $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n(n+2)}, n = 2k - 1, k \in \mathbf{N}^*, \\ 2a_{n-1}, n = 2k, k \in \mathbf{N}^*, \end{cases}$  则  $S_{12} =$ \_\_\_\_\_.

16. 在三棱锥  $P-ABC$  中， $\triangle ABC$  是等边三角形， $PA \perp$  平面  $ABC$ ， $PA = 4$ ， $AB = 2\sqrt{2}$ ， $D$  是  $AC$  的中点，球  $O$  为三棱锥  $P-ABC$  的外接球， $G$  是球  $O$  上的一点，则三棱锥  $G-PDC$  体积的最大值是\_\_\_\_\_.

**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17. (本小题满分 10 分) 已知数列  $\{a_n\}$  是等差数列，其前  $n$  项和为  $S_n$ ，且  $2a_2 + a_4 = 13$ ， $S_7 = 49$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式；

(2) 设  $b_n = a_n + 2^{a_n}$ ，求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

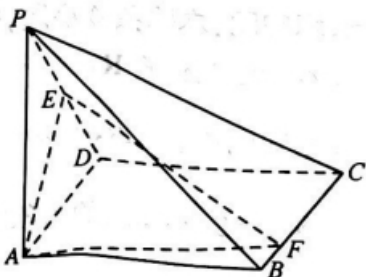
18. (本小题满分 12 分) 在锐角  $\triangle ABC$  中，内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，且

$$(a - b)(\sin A + \sin B) = (\sin C - \sin B)(a \cos B + b \cos A).$$

(1) 求角  $A$  的大小；

(2) 若  $\triangle ABC$  外接圆的半径为  $\sqrt{3}$ ，求  $\frac{b^2 + c^2}{a^2}$  的取值范围.

19. (本小题满分 12 分) 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  为正方形， $PA \perp$  平面  $ABCD$ ， $PA = AB$ ，点  $E$  是棱  $PD$  的中点，点  $F$  是棱  $BC$  上的一点.



(1) 求证：平面  $AEF \perp$  平面  $PDC$ ；

(2) 若  $CF = 3FB$ ，求平面  $AEF$  与平面  $PBC$  夹角的余弦值.

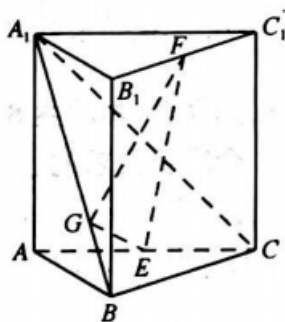
20. (本小题满分 12 分) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 3$ ， $a_2 = 27$ ， $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ .

(1) 证明：数列  $\{a_{n+1} - 3a_n\}$  是等比数列；

(2) 求数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

21. (本小题满分 12 分) 如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AB = AA_1 = BC = 4$ , 平面  $A_1BC \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ,

点  $E, F$  分别是棱  $AC, B_1C_1$  的中点, 点  $G$  是线段  $A_1B$  上的一点.



(1) 求证:  $EF \perp BC$ ;

(2) 若直线  $A_1C$  与平面  $EFG$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ , 求  $\frac{A_1G}{GB}$  的值.

22. (本小题满分 12 分) 已知函数  $f(x) = x \ln x - a(2x^2 + 1) (a \in \mathbf{R})$ .

(1) 若  $a = -1$ , 求  $f(x)$  的图象在  $x = 1$  处的切线方程;

(2) 若  $f(x)$  有两个极值点  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ .

① 求  $a$  的取值范围;

② 求证:  $3x_2 - x_1 > \frac{1}{a} - 2$ .