2023—2024 学年(上)南阳六校高二年级期中考试

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案　C

命题意图　本题考查直线的方程与性质.

解析　直线 l 的斜率为 $k=\frac{1-3}{-2-2}=\frac{1}{2}$,∴ 直线 l 的方程为 $y-1=\frac{1}{2}(x+2)$,即 $y=\frac{1}{2}x+2$,故直线 l 在 y 轴上的截距为 2.

2. 答案　A

命题意图　本题考查椭圆的方程与性质.

解析　∵ $|PF_1|+|PF_2|=2a=10$,而 $|PF_1|=6$,∴ $|PF_2|=4$,又 Q 是 PF_1 的中点,O 是 F_1F_2 的中点,∴ OQ 为 $\triangle PF_1F_2$ 的中位线,∴ $|OQ|=\frac{1}{2}|PF_2|=2$.

3. 答案　B

命题意图　本题考查双曲线的基本性质.

解析　∵ 双曲线 C 的渐近线方程为 $x\pm 2y=0$,∴ 可设 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$,把点 $(4,1)$ 的坐标代入得 $\lambda=\frac{4^2}{4}-1=3$,故 C 的方程为 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$.

4. 答案　D

命题意图　本题考查直线与圆的位置关系.

解析　直线 l 上的点 A 到圆心 C 的距离 $|AC|$ 最小时,切线长最小,$|AC|_{\min}=\frac{|4\times 1+3\times 2+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{15}{5}=3$,∴ 切线长的最小值为 $\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$.

5. 答案　C

命题意图　本题考查直线的方程与性质.

解析　分两种情况:①当 l 过原点时,由直线经过点 $(-3,3)$,可得直线方程为 $y=-x$,即 $x+y=0$;②当 l 不过原点时,设 l 的方程为 $\frac{x}{3a}+\frac{y}{a}=1(a\neq 0)$,将点 $(-3,3)$ 的坐标代入得 $\frac{-3}{3a}+\frac{3}{a}=1$,解得 $a=2$,此时 l 的方程为 $\frac{x}{6}+\frac{y}{2}=1$,即 $x+3y-6=0$.

6. 答案　C

命题意图　本题考查直线与抛物线的位置关系.

解析　设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,把 l 与 C 的方程联立,得 $\begin{cases} y=-\left(x-\frac{p}{2}\right), \\ y^2=2px, \end{cases}$ 消去 y 并整理,得 $x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$,可

1

官方微信公众号:zizzsw　　咨询热线:010-5601 9830

官方网站:www.zizzs.com　　微信客服:zizzs2018

得 $x_1+x_2=3p$. 观察可知 l 经过 C 的焦点 $\left(\frac{p}{2},0\right)$, $\therefore |AB|=x_1+x_2+p=3p+p=16$, $\therefore p=4$, $\therefore C$ 的方程为 $y^2=8x$.

7. **答案** D

命题意图 本题考查直线与椭圆的位置关系.

解析 设椭圆的半焦距为 $c(c>0)$. 由题意设点 $P(c,y_0)$, 则 $y_0=\frac{bc}{a}+b$, 即 $P\left(c,\frac{bc}{a}+b\right)$, $\therefore k_{OP}=\frac{\frac{bc}{a}+b}{c}=\frac{b(a+c)}{ac}$, 又 $k_l=\frac{b}{a}$, $k_l=mk_{OP}$, 即 $\frac{b}{a}=m\cdot\frac{b(a+c)}{ac}$, 整理得 $m=\frac{c}{a+c}=\frac{e}{e+1}=1-\frac{1}{e+1}$, 而 $\frac{1}{4}<e<1$, $\therefore \frac{1}{5}<m<\frac{1}{2}$.

8. **答案** A

命题意图 本题考查双曲线的性质.

解析 $\because |AF_1|:|BF_1|=3:1$, $\therefore$ 可设 $|BF_1|=t(t\neq0)$, $|AF_1|=3t$, 而 $|AF_2|-|AF_1|=2a$, $|BF_2|-|BF_1|=2a$, $\therefore |BF_2|=t+2a$, $|AF_2|=3t+2a$. $\because AB\perp BF_2$, $\therefore |AF_2|^2=|AB|^2+|BF_2|^2$, 即 $(3t+2a)^2=16t^2+(t+2a)^2$, 解得 $t=a$, 又 $|F_1F_2|^2=|BF_1|^2+|BF_2|^2$, 即 $4c^2=t^2+(t+2a)^2=10a^2$, $\therefore c^2=\frac{5}{2}a^2$, 双曲线 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. **答案** BC

命题意图 本题考查直线的方程与性质.

解析 对于 A, 倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$ 时不成立, 故 A 错误;

对于 B, 根据直线方程的点斜式的定义可知 B 正确;

对于 C, 化简得直线 $y+4=a(x+2)$, 过定点 $(-2,-4)$, 故 C 正确;

对于 D, 直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 与 x 轴的交点为 $(a,0)$, 到原点的距离为 $|a|$, 故 D 错误.

10. **答案** AD

命题意图 本题考查圆与圆的位置关系.

解析 对于 A, 两圆的半径均为 3, 则 PQ 为线段 C_1C_2 的垂直平分线, 故圆 C_1 与圆 C_2 关于直线 PQ 对称, A 正确;

对于 B, 因为圆 C_1 与圆 C_2 相交, 所以两个方程相减可得直线 PQ 的方程为 $6x-8y-25=0$, B 错误;

对于 C, 因为圆 C_1 与圆 C_2 相交, 所以有两条公切线, 又两圆的半径相等, 所以公切线与 C_1C_2 平行, 即公切线的斜率 $k=-\frac{4}{3}$, 设公切线方程为 $y=-\frac{4}{3}x+b$, 即 $4x+3y-3b=0$, 所以 $3=\frac{3|b|}{\sqrt{4^2+3^2}}$, 解得 $b=\pm5$, 所以 C_1 与 C_2 的公切线方程为 $4x+3y-15=0$ 或 $4x+3y+15=0$, C 错误;

对于 D, $|AB|$ 的最大值为 $|C_1C_2|+r_1+r_2=\sqrt{3^2+4^2}+3+3=11$, D 正确.

11. **答案** BCD

命题意图 本题考查圆与椭圆的方程及位置关系.

解析 对于 A, 椭圆 C 的方程可化为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$, $\therefore$ 半焦距 $c=\sqrt{8-4}=2$, $\therefore$ 离心率 $e=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 A 错误;

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

对于 B，圆 P 的方程可化为 $(x-1)^2+y^2=\frac{1}{2}$，∴ 圆心为 $P(1,0)$，故 B 正确；

对于 C，圆 P 上的点 $\left(1\pm\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ 显然在椭圆 C 内，由 $\begin{cases}x^2+2y^2=8,\\2x^2+2y^2-4x+1=0,\end{cases}$ 可得 $x^2-4x+9=0$，而 $\Delta=16-36=-20<0$，∴ 椭圆 C 与圆 P 无公共点，∴ 圆 P 在椭圆 C 内部，故 C 正确；

对于 D，设 $A(x,y)(-2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2})$，则 $|AP|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{\frac{1}{2}x^2-2x+5}=\sqrt{\frac{1}{2}(x-2)^2+3}$，∴ $x=2$ 时，$|AP|$ 取得最小值 $\sqrt{3}$，∴ $|AB|$ 的最小值为 $\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 D 正确.

12. **答案**　ACD

命题意图　本题考查抛物线与直线的位置关系.

解析　∵ $|MF|=6$，∴ $4+\frac{p}{2}=6$，∴ $p=4$，C 的方程为 $y^2=8x$，故 A 正确；将点 $M(4,y_0)$ 的坐标代入 C 的方程得 $y_0^2=8\times4=32$，故 $y_0=\pm4\sqrt{2}$，故 B 错误；设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，∵ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，∴ $OA\perp OB$，∴ $k_{OA}\cdot k_{OB}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{8}}\cdot\frac{y_2}{\frac{y_2^2}{8}}=\frac{64}{y_1y_2}=-1$，∴ $y_1y_2=-64$，故 C 正确；设 $l:x=my+b$，l 的方程与 $y^2=8x$ 联立可得 $y^2-8my-8b=0$，∴ $y_1y_2=-8b=-64$，∴ $b=8$，∴ 直线 l 恒过点 $(8,0)$，故 D 正确.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案**　3

命题意图　本题考查抛物线的性质.

解析　设点 P 的横坐标为 x_0，由抛物线 $y^2=4x$ 上的点 P 到准线的距离为 4，可得 $4=x_0+\frac{p}{2}=x_0+1$，解得 $x_0=3$.

14. **答案**　$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

命题意图　本题考查直线与直线的平行.

解析　∵ l_1 与 l_2 平行，∴ $m(m-3)=-6m$，即 $m^2+3m=0$，解得 $m=0$（舍去）或 $m=-3$. 当 $m=-3$ 时，直线 $l_1:3x+3y-2=0$，$l_2:3x+3y+2=0$，此时两平行直线之间的距离为 $\frac{4}{\sqrt{9+9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

15. **答案**　$\frac{1}{2}$

命题意图　本题考查椭圆的性质.

解析　设椭圆的半焦距为 $c(c>0)$，$P(x_0,0)$，∵ $F_1(-c,0)$，$B(0,b)$，∴ $\overrightarrow{F_1B}=(c,b)$，$\overrightarrow{BP}=(x_0,-b)$. 又 $F_1B\perp BP$，∴ $\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，∴ $cx_0-b^2=0$，故 $x_0=\frac{b^2}{c}$，又 F_2 为线段 F_1P 的中点，∴ $2c=\frac{b^2}{c}-c$，即 $b^2=3c^2=a^2-c^2$，∴ $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

16. **答案**　$[2,8]$

命题意图　本题考查圆与圆的位置关系.

解析　∵ $|C_1A|=2$，$C_1A\perp AP$，$|PA|=2\sqrt{3}$，∴ $|PC_1|=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$，∴ 点 P 在以 C_1 为圆心，4 为半径的

3
官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

圆上,可设其轨迹方程为 $C: x^2+y^2=16$. 由于点 P 在圆 C, C_2 上,∴ 圆 C, C_2 相切或相交,∴ $2\leqslant\sqrt{(m-2)^2+m^2}\leqslant 10$,又 $m>0$,解得 $2\leqslant m\leqslant 8$,∴ 实数 m 的取值范围是 $[2,8]$.

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查直线的性质,点到直线的距离.

解析 (Ⅰ)直线 l 的方程可化为 $y=ax+3+a^2$,

要使直线 l 不经过第三象限,则必须有 $\begin{cases}a\leqslant 0,\\ a^2+3\geqslant 0,\end{cases}$ ……………………(2 分)

解得 $a\leqslant 0$,故 a 的取值范围是 $(-\infty,0]$. ……………………(4 分)

(Ⅱ)设原点 O 到直线 l 的距离为 d,

则 $d=\dfrac{|3+a^2|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{3+a^2}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{a^2+1}}+\sqrt{a^2+1}\geqslant 2\sqrt{2}$, ……………………(7 分)

当且仅当 $\dfrac{2}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}$,即 $a=\pm 1$ 时,等号成立, ……………………(8 分)

此时直线 l 的方程为 $x-y+4=0$ 或 $x+y-4=0$. ……………………(10 分)

18. **命题意图** 本题考查椭圆的方程,椭圆与直线的位置关系.

解析 (Ⅰ)设椭圆 C 的半焦距为 $c(c>0)$.

∵ 直线 $x+\sqrt{3}y=\sqrt{3}$ 过点 $(\sqrt{3},0)$ 和 $(0,1)$, ……………………(2 分)

∴ $c=\sqrt{3}$, $b=1$,∴ $a=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$, ……………………(4 分)

故 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………(5 分)

(Ⅱ)由题可设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$,

由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 可得 $(1+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$, ……………………(6 分)

∴ $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{1+4k^2}$, $x_1x_2=\dfrac{4k^2-4}{1+4k^2}$, ……………………(7 分)

又 $|x_1-x_2|=\dfrac{8}{5}$,∴ $\dfrac{64}{25}=|x_1-x_2|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\dfrac{64k^4}{(1+4k^2)^2}-4\cdot\dfrac{4k^2-4}{1+4k^2}$, ……………………(9 分)

整理可得 $64k^4-43k^2-21=0$,解得 $k^2=1$(负值舍去),∴ $k=\pm 1$, ……………………(11 分)

故直线 l 的方程为 $y=x-1$ 或 $y=-x+1$. ……………………(12 分)

19. **命题意图** 本题考查圆的方程及直线与圆的位置关系.

解析 (Ⅰ)设圆 M 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, ……………………(1 分)

因为圆 M 为 $\triangle ABC$ 的外接圆,

所以 $\begin{cases}37+D+6E+F=0,\\ 29+2D+5E+F=0,\\ 29-5D-2E+F=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=4,\\ E=-4,\\ F=-17,\end{cases}$

所以圆 M 的方程为 $x^2+y^2+4x-4y-17=0$, ……………………(4 分)

故圆 M 的标准方程为 $(x+2)^2+(y-2)^2=25$. ……………………(5 分)

(Ⅱ)因为过点 $P(-1,-4)$ 作直线 l,被圆 M 截得的弦长为 $4\sqrt{6}$,

4
官方微信公众号：zizzsw
咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com
微信客服：zizzs2018

所以可得圆心到直线 l 的距离为 $\sqrt{25-(2\sqrt{6})^2}=1$. ……（7 分）

当 l 的斜率不存在时，方程为 $x=-1$，满足题意；……（8 分）

当 l 的斜率存在时，设方程为 $y+4=k(x+1)$，即 $kx-y+k-4=0$，

由 $\frac{|-2k-2+k-4|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=-\frac{35}{12}$，……（10 分）

所以直线 l 的方程为 $y+4=-\frac{35}{12}(x+1)$，即 $35x+12y+83=0$. ……（11 分）

综上所述，所求直线 l 的方程为 $x=-1$ 或 $35x+12y+83=0$. ……（12 分）

20. **命题意图** 本题考查抛物线的方程，抛物线与直线的位置关系.

解析 （Ⅰ）由题意可设 $C:y^2=2px(p>0)$，……（1 分）

将点 $(1,2)$ 的坐标代入，可得 $4=2p$，$\therefore p=2$，……（3 分）

故 C 的方程为 $y^2=4x$. ……（4 分）

（Ⅱ）设线段 AB 的中点为 $P(a,b)$，

则 $a=\frac{x_1+x_2}{2}=4$，$b=\frac{y_1+y_2}{2}$，即 $y_1+y_2=2b$.

当 $x_1=x_2$ 时，$l:x=4$，此时 $|AB|=8$，不成立；……（6 分）

当 $x_1\neq x_2$ 时，$b\neq 0$，$k_l=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4(y_2-y_1)}{y_2^2-y_1^2}=\frac{4}{y_2+y_1}=\frac{2}{b}$，

$\therefore$ 直线 $l:y-b=\frac{2}{b}(x-4)$，即 $x=\frac{b}{2}(y-b)+4$，① ……（7 分）

①与 C 的方程联立，消去 x，整理得 $y^2-2by+2b^2-16=0$，

$\therefore y_1+y_2=2b$，$y_1y_2=2b^2-16$，……（8 分）

而 $|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{b}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{(2b)^2-8b^2+64}=\sqrt{(b^2+4)(16-b^2)}=6$，

……（10 分）

解得 $b^2=-2$（舍去）或 $b^2=14$，$\therefore b=\pm\sqrt{14}$，

故直线 l 的方程为 $2x+\sqrt{14}y+6=0$ 或 $2x-\sqrt{14}y+6=0$. ……（12 分）

21. **命题意图** 本题考查椭圆的方程，椭圆与直线的位置关系.

解析 （Ⅰ）由题意知 $\triangle F_1EF_2$ 的面积最大值为 $S=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot b=2$，解得 $b=\sqrt{2}$，……（2 分）

又椭圆的左、右焦点分别为 $F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，$\therefore$ 半焦距 $c=\sqrt{2}$，……（3 分）

$\therefore a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{2+2}=2$，……（4 分）

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ……（5 分）

（Ⅱ）当 $t=0$ 时，$|AQ|=|BQ|$ 恒成立. 当 $t\neq 0$ 时，由题意知直线 OP 的方程为 $y=\frac{m}{t}x$，

联立 $\begin{cases} y=\frac{t}{2}x+1, \\ y=\frac{m}{t}x, \end{cases}$ 得 $x=\frac{2t}{2m-t^2}$，即 Q 点的横坐标为 $x_Q=\frac{2t}{2m-t^2}$. ……（7 分）

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

联立$\begin{cases} y=\frac{t}{2}x+1, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1, \end{cases}$ 消去 y 并整理可得$\left(1+\frac{t^2}{2}\right)x^2+2tx-2=0$,

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$x_1+x_2=-\frac{2t}{1+\frac{t^2}{2}}=-\frac{4t}{2+t^2}$. …………（9 分）

由已知可得 Q 是 AB 的中点,$\therefore x_Q=\frac{x_1+x_2}{2}$,

即$-\frac{2t}{2+t^2}=\frac{2t}{2m-t^2}$,该式对任意 $t\in\mathbf{R}$ 且 $t\neq 0$ 恒成立, …………（11 分）

$\therefore m=-1$.

综上可知 $m=-1$. …………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查双曲线的性质,双曲线与直线的位置关系.

解析 （Ⅰ）$\because$ C 的右焦点为 $F(\sqrt{5},0)$,$\therefore$ C 的半焦距 $c=\sqrt{5}$, …………（1 分）

又离心率为 $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$\therefore \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$\therefore a=2$, …………（3 分）

$\therefore b^2=c^2-a^2=5-4=1$,

故 C 的方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$. …………（5 分）

（Ⅱ）易知 $A_1(-2,0)$,$A_2(2,0)$.

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,直线 l 的方程为 $x=ty+4$,

由$\begin{cases} x=ty+4, \\ \frac{x^2}{4}-y^2=1, \end{cases}$ 消去 x 可得$(t^2-4)y^2+8ty+12=0$, …………（6 分）

由题意知 $-2<t<2$,且$\begin{cases} y_1+y_2=-\frac{8t}{t^2-4}, \\ y_1y_2=\frac{12}{t^2-4}, \end{cases}$ …………（7 分）

$$\therefore \frac{k_{MA_1}}{k_{NA_2}}=\frac{\frac{y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}} \text{…………（8 分）}$$

$$=\frac{y_1}{x_1+2}\times\frac{x_2-2}{y_2}=\frac{y_1(ty_2+2)}{y_2(ty_1+6)}=\frac{ty_1y_2+2y_1}{ty_1y_2+6y_2} \text{…………（9 分）}$$

$$=\frac{ty_1y_2+2(y_1+y_2)-2y_2}{ty_1y_2+6y_2}=\frac{\frac{12t}{t^2-4}-\frac{16t}{t^2-4}-2y_2}{\frac{12t}{t^2-4}+6y_2}=\frac{-\frac{4t}{t^2-4}-2y_2}{\frac{12t}{t^2-4}+6y_2} \text{…………（11 分）}$$

$$=-\frac{1}{3},$$

即$\frac{k_{MA_1}}{k_{NA_2}}$为定值$-\frac{1}{3}$. …………（12 分）

官方微信公众号：zizzsw
官方网站：www.zizzs.com
咨询热线：010-5601 9830
微信客服：zizzs2018

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。