

江苏省 2024 年普通高中学业水平合格性考试试卷 (4)

数学试题

一、选择题-高考 Q 群 742926234-公众号：课标试卷：本大题共 28 小题，每小题 3 分，共计 84 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 已知集合  $A = \{-1, 1, 2\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1\}$ , 则  $A \cup B$  等于 ( )

- A.  $\{1\}$       B.  $\{-1, 0, 2\}$       C.  $\{-1, 0, 1, 2\}$       D.  $\emptyset$

1. C 解析：由并集运算的定义， $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2\}$ 。故选 C。

2. 若  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$ , 则下列不等式中正确的是 ( )

- A.  $a < b$       B.  $a^2b > ab^2$   
C.  $|a| > -b$       D.  $a < \frac{a+b}{2}$

2. B 解析：因为  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$ , 所以  $b < a < 0$ , 故 A 错误；因为  $b < a < 0$ , 所以  $ab > 0$ , 则有  $a^2b > ab^2$ , 故 B 正确；因为  $b < a < 0$ , 所以  $-a < -b$ , 又因为  $a < 0$ , 所以  $|a| = -a$ , 则  $-a = |a| < -b$ , 故 C 错误；因为  $b < a < 0$ , 所以  $a+b < a+a$ , 两边同时除以 2 可得： $\frac{a+b}{2} < a$ , 故 D 错误。故选 B。

3. 已知  $\frac{a-i}{1+i} = 3+2bi (a, b \in \mathbb{R})$ , 则  $a+b =$  ( )

- A. 3      B. 4      C. 5      D. 7

3. C 解析： $a-i = (1+i)(3+2bi) = 3-2b+(2b+3)i$ , 则  $\begin{cases} 3-2b=a \\ 2b+3=-1 \end{cases}$ , 所以  $\begin{cases} a=7 \\ b=-2 \end{cases}$ , 故  $a+b=5$ 。故选 C。

4. 已知  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ ,  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  的均值为 6, 则  $x_5 =$  ( )

- A. 4      B. 5      C. 8      D. 10

4. D 解析：由题意得， $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \times 5 = 30$ ,  $\therefore x_5 = 30 - 20 = 10$ 。故选 D。

5. 命题“ $\forall m \in \mathbf{N}, \sqrt{m^2+1} \leq 0$ ”的否定是 ( )

- A.  $\exists m_0 \notin \mathbf{N}, \sqrt{m_0^2+1} \geq 0$     B.  $\exists m_0 \in \mathbf{N}, \sqrt{m_0^2+1} > 0$   
C.  $\exists m_0 \in \mathbf{N}, \sqrt{m_0^2+1} \leq 0$     D.  $\forall m \in \mathbf{N}, \sqrt{m^2+1} > 0$

5. B 解析: 命题“ $\forall m \in \mathbf{N}, \sqrt{m^2+1} \leq 0$ ”的否定是“ $\exists m_0 \in \mathbf{N}, \sqrt{m_0^2+1} > 0$ ”. 故选 B.

6.  $\cos\left(-\frac{45\pi}{4}\right) =$  ( )

- A.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$     B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     C.  $-\frac{1}{2}$     D.  $\frac{1}{2}$

6. A 解析:  $\cos\left(-\frac{45\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{45\pi}{4} + 12\pi\right) = \cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 故选 A.

7. 函数  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{3-x}$  的定义域为 ( )

- A.  $[-1, +\infty)$     B.  $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$   
C.  $(-1, 3)$     D.  $(-1, +\infty)$

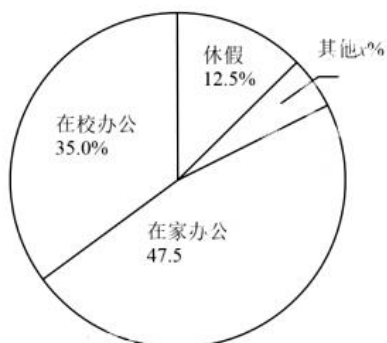
7. B 解析: 由题意  $\begin{cases} 3-x \neq 0 \\ 1+x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x > -1 \end{cases}$ , 所以  $f(x)$  的定义域为  $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$ . 故选 B.

8. 若将函数  $y = \tan x$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位, 再将所有点的横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{3}$ , 则所得到的图象对应的函数表达式为 ( )

- A.  $y = \tan\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$     B.  $y = \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$   
C.  $y = \tan\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$     D.  $y = \tan\left(3x + \frac{\pi}{12}\right)$

8. B 解析: 函数  $y = \tan x$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位, 得  $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ , 再将所有点的横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{3}$ , 得  $y = \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ . 故选 B.

9. 新冠疫情防控期间, 某市中小学实行线上教学, 停课不停学. 某校对 240 名职工线上教学期间的办公情况进行了调查统计, 结果如图所示, 则下列结论中错误的是 ( )



- A.  $x=5.0$   
 B. 从该校任取一名职工，该职工不在家办公的概率为 0.525  
 C. 该校休假的职工不超过 10 名  
 D. 该校在家办公或在校办公的职工不超过 200 名

9. C 解析:  $x=100-47.5-35-12.5=5$ , A 正确; 由图知, 在家办公的职工占 47.5%, 所以不在家办公的职工占 52.5%, 故 B 正确; 该校休假的职工人数为  $240 \times 12.5\% = 30$  人, 故 C 错误; 在家或在校办公的职工人数为  $240 \times (35\% + 47.5\%) = 198$  人, 故 D 正确. 故选 C.

10. 分别抛掷 4 枚质地均匀的硬币, 则朝上的面不全相同的概率为 ( )

- A.  $\frac{15}{16}$       B.  $\frac{7}{8}$       C.  $\frac{3}{4}$       D.  $\frac{5}{8}$

10. B 解析: 朝上的面可能全部为正面, 也可能全部为反面, 故全部相同的概率为  $2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$ , 所以朝上的面不全相同的概率为  $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ . 故选 B.

11. 已知  $a = \lg \sqrt{10}, b = 2^{0.1}, c = \ln \frac{1}{3}$ , 则 ( )

- A.  $a > c > b$       B.  $b > a > c$       C.  $a > b > c$       D.  $c > b > a$

11. B 解析: 因为  $\lg \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ , 所以  $a = \frac{1}{2}$ , 因为  $2^{0.1} > 2^0 = 1$ , 所以  $b > 1$ , 因为  $\ln \frac{1}{3} < \ln 1 = 0$ , 所以  $c < 0$ , 综上可得  $b > a > c$ . 故选 B.

12. 直线  $a$  与平面  $\alpha$  不平行, 则  $\alpha$  内与  $a$  平行的直线有 ( )

- A. 无数条      B. 0 条      C. 1 条      D. 以上均不对

12. D 解析: 因为直线  $a$  与平面  $\alpha$  不平行, 所以直线  $a$  与平面  $\alpha$  的关系有两种, 即  $a \subset \alpha$  以及直线  $a$  与平面  $\alpha$  相交. 当  $a \subset \alpha$  时, 显然在  $\alpha$  内与  $a$  平行的直线有无数条; 当直线  $a$  与平面  $\alpha$  相交时, 设  $a \cap \alpha = A$ . 当  $b \subset \alpha$ , 且  $A \in b$  时, 此时  $a \cap b = A$ , 即直线  $a, b$  相交; 当  $b \subset \alpha$ , 且  $A \notin b$  时, 可知直线  $a, b$  异面. 综上, 当直线  $a$  与平面  $\alpha$  相交时,  $\alpha$  内与  $a$  平行的直线有 0 条. 所以, 直线  $a$  与平面  $\alpha$

不平行，则 $\alpha$ 内与 $a$ 平行的直线有无数条或0条。故选D。

13. 下列函数既是偶函数，又在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是（ ）

- A.  $y = \cos x$     B.  $y = -x^2$     C.  $y = \frac{1}{x}$     D.  $y = |x|$

13. D 解析：对于A： $y = \cos x$ 为偶函数，但是在 $(0, +\infty)$ 上不具有单调性，故A错误；对于B： $y = -x^2$ 为偶函数，但是在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，故B错误；对于C： $y = \frac{1}{x}$ 为奇函数，故C错误；对于D： $y = f(x) = |x|$ ，则 $f(-x) = |-x| = f(x)$ ，所以 $y = |x|$ 为偶函数，且当 $x > 0$ 时 $y = x$ ，则函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，故D正确。故选D。

14. 已知 $\tan \alpha = 2$ ，则 $\frac{6\sin \alpha + \cos \alpha}{3\sin \alpha - 2\cos \alpha}$ 的值为（ ）

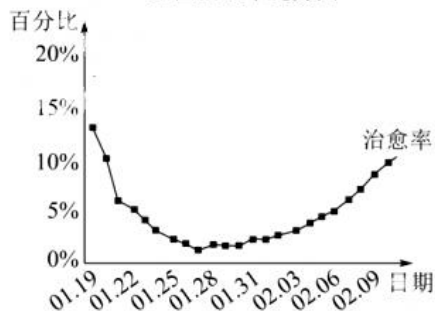
- A. -4    B.  $\frac{13}{4}$     C.  $-\frac{13}{4}$     D.  $\pm \frac{13}{4}$

14. B 解析： $\frac{6\sin \alpha + \cos \alpha}{3\sin \alpha - 2\cos \alpha}$ 分子分母同时除以 $\cos \alpha$ ，得

$$\frac{6\sin \alpha + \cos \alpha}{3\sin \alpha - 2\cos \alpha} = \frac{6\tan \alpha + 1}{3\tan \alpha - 2} = \frac{6 \times 2 + 1}{3 \times 2 - 2} = \frac{13}{4} \text{. 故选 B.}$$

15. 面对突如其来的新冠病毒疫情，中国人民在中国共产党的领导下，上下同心、众志成城抗击疫情的行动和成效，向世界展现了中国力量、中国精神。下面几个函数模型中，能比较近似地反映出图中时间与治愈率关系的是（ ）

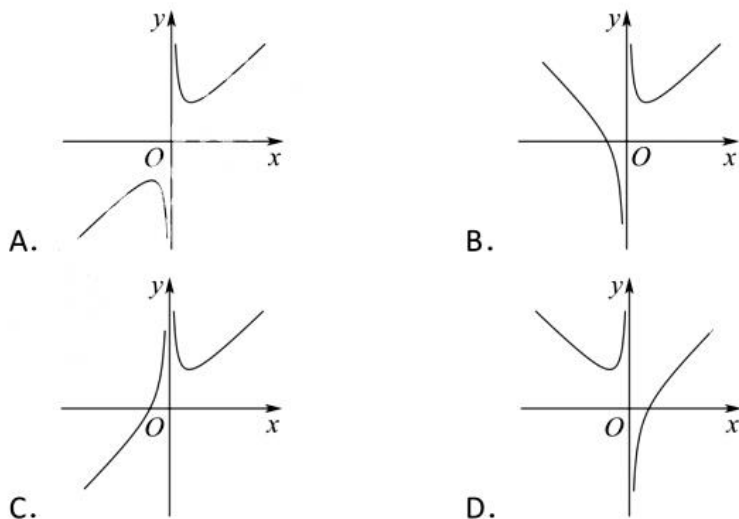
全国治愈率趋势图



- A.  $y = ax + b$     B.  $y = ax^2 + bx + c$   
C.  $y = a^x$     D.  $y = \log_a x$

15. B 解析：根据图象可知，治愈率先减后增，B选项符合.ACD选项都是单调函数，不符合。故选B。

16. 函数  $f(x) = x + \frac{1}{|x|}$  的图象大致为 ( )



16. C 解析:  $x < 0$  时,  $f(x) = x - \frac{1}{x}$  是增函数 (增函数+增函数=增函数), 只有选项 C 满足. 故选 C.

17. 若偶函数  $f(x)$  在区间  $[-5, 0]$  上是增函数且最小值为  $-4$ , 则  $f(x)$  在区间  $[0, 5]$  上是 ( )

- A. 减函数且最小值为  $-4$       B. 增函数且最小值为  $-4$   
C. 减函数且最大值为  $4$       D. 增函数且最大值为  $4$

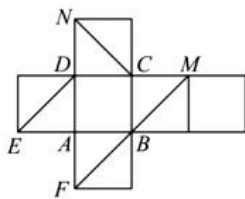
17. A 解析: 由于函数  $f(x)$  是偶函数, 函数图象关于  $y$  轴对称, 又  $f(x)$  在区间  $[-5, 0]$  上是增函数且最小值为  $-4$ , 则  $f(x)$  在区间  $[0, 5]$  上是减函数, 且最小值为  $-4$ . 故选 A.

18. 已知函数  $f(x) = -x^2 + 4x + m$ , 若  $\exists x \in [0, 1], f(x) = 0$ , 则实数  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $[-4, +\infty)$     B.  $[-3, +\infty)$     C.  $[-3, 0]$     D.  $[-4, 0]$

18. C 解析:  $\because$  函数  $f(x) = -x^2 + 4x + m$  的图象开口向下, 对称轴方程为  $x = 2$ ,  $\therefore$  函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上单调递增,  $\therefore f(x)_{\max} = f(1) = 3 + m$ ,  $f(x)_{\min} = f(0) = m$ , 即函数  $f(x)$  的值域为  $[m, m+3]$ . 由方程  $f(x) = 0$  有解知,  $0 \in [m, m+3]$ , 因此  $m \leq 0$ , 且  $m+3 \geq 0$ , 解得  $-3 \leq m \leq 0$ . 故选 C.

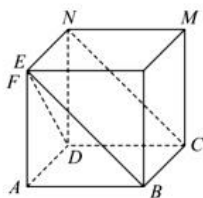
19. 如图是正方体的平面展开图, 则在这个正方体中, 与直线  $CN$  平行的直线是 ( )



A. DE B. AB C. BF D. BM

19. C 解析：如图所示为正方体的平面展开图所对应的几何体，其中点 E, F 重合，直线  $DE \subset$  平面  $ADNE$ ，点  $N \in$  平面  $ADNE$ ， $N \notin DE$ ，点  $C \notin$  平面  $ADNE$ ，则  $DE$  与  $CN$  是异面直线，同理  $BM$  与  $CN$  是异面直线，A, D 错误；而  $AB \parallel DC$ ， $DC \cap CN = C, DC, CN \subset$  平面  $CDNM$ ， $AB \not\subset$  平面  $CDNM$ ，则  $AB$  与  $CN$  是异面直线，B 错误；

$FN \parallel AD \parallel BC, FN = AD = BC$ ，即四边形  $BCNF$  是平行四边形， $BF \parallel CN$ ，C 正确。故选 C.



20. 下列区间中，函数  $f(x) = 7\sin(x - \frac{\pi}{6})$  的单调递增区间是( )

- A.  $(0, \frac{\pi}{2})$                       B.  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$   
C.  $(\pi, \frac{3\pi}{2})$                       D.  $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

20. A 解析：令  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$ ，得  $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$ . 取  $k=0$ ，则  $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ . 因为  $(0, \frac{\pi}{2}) \subseteq [-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ ，所以区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  是函数  $f(x)$  的单调递增区间。故选 A.

21. 函数  $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x}$  的最小正周期是 ( )

- A.  $\frac{\pi}{2}$  B.  $\pi$  C.  $2\pi$  D.  $4\pi$

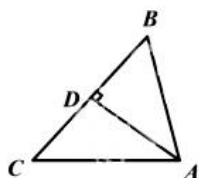
21. C 解析：定义域为  $\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$ .  $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos x} = 2\sin x, (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z)$ ，最小正周期为  $2\pi$ 。故选 C.

22. 在  $\triangle ABC$  中， $AB = AC$ ， $AD$  是  $BC$  边上的中线，且  $BC = 4, AD = 3$ ，则  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = ( )$

A. -5 B. 5 C. -8 D. 8

22. B 解析: 如图, 由  $AD \perp BC$ , 所以  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ , 又  $AB = AC$ , 所以  $D$  为  $BC$  的中点, 所以  $BD = DC = \frac{1}{2}BC = 2$ , 所以  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{DC}^2 = 9 - 4 = 5$ . 故选

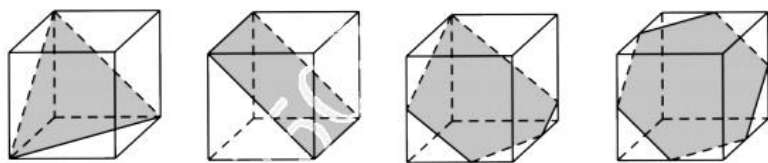
B.



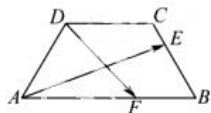
23. 用一个平面去截一个正方体, 截面边数最多有 ( )

A. 5 条 B. 6 条 C. 7 条 D. 8 条

23. B 解析: 正方体有六个面, 用一个平面去截一个正方体, 截面的形状可能是: 三角形、四边形、五边形、六边形, 如图所示, 因此截面边数最多有 6 条. 故选 B.



24. 如图, 在等腰梯形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 4$ ,  $BC = CD = 2$ , 若  $E, F$  分别是边  $BC, AB$  上的点, 且  $\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CE}$ ,  $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$ , 则  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} = ( )$



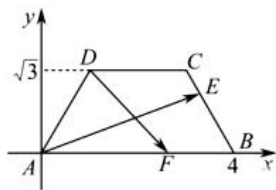
A.  $\frac{4}{3}$  B.  $\frac{16}{9}$  C.  $\frac{32}{9}$  D. 5

24. C 解析: 如图所示建立直角坐标系, 则  $A(0,0)$ ,  $B(4,0)$ ,  $C(3, \sqrt{3})$ ,  $D(1, \sqrt{3})$ ,

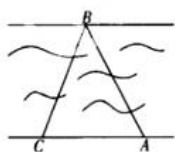
所以  $\overrightarrow{CB} = (1, -\sqrt{3})$ ,  $\overrightarrow{AB} = (4, 0)$ , 又  $\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{CE}$ ,  $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$ , 所以  $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ,

$\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{8}{3}, 0\right)$ , 则  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = (3, \sqrt{3}) + \left(\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ,  $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} = \left(\frac{8}{3}, 0\right) - (1, \sqrt{3})$

$= \left(\frac{5}{3}, -\sqrt{3}\right)$ , 所以  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DF} = \left(\frac{10}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{3}, -\sqrt{3}\right) = \frac{32}{9}$ . 故选 C.



25. 如图,  $A, B$  两点在河的两岸, 为测量  $A, B$  两点间的距离, 测量人员在  $A$  的同侧选定一点  $C$ , 测出  $A, C$  两点间的距离为 60 米,  $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$ , 则  $A, B$  两点间的距离为 ( )



- A.  $30(3\sqrt{2} - \sqrt{6})$  米      B.  $30(1 + \sqrt{3})$  米  
C.  $40\sqrt{3}$  米      D.  $40(\sqrt{2} + \sqrt{6})$  米

25. A 解析: 由题意可得  $\sin \angle ABC = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ , 由正弦定

理可知  $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$ ,  $AB = \frac{AC \cdot \sin \angle ACB}{\sin \angle ABC} = \frac{60 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = 30(3\sqrt{2} - \sqrt{6})$ . 故选 A.

26. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ |\log_2 x|, & x > 0 \end{cases}$ , 则使  $f(x) = 2$  的  $x$  的集合是 ( )

- A.  $\{4\}$     B.  $\{1, 4\}$     C.  $\left\{\frac{1}{4}, 4\right\}$     D.  $\left\{1, \frac{1}{4}, 4\right\}$

26. C 解析: 当  $x \leq 0$  时,  $f(x) = 2^x = 2$ , 所以  $x = 1$  不满足题意; 当  $x > 0$  时,  $f(x) = |\log_2 x| = 2$ , 所以  $\log_2 x = 2$  或  $\log_2 x = -2$ , 即  $x = 4$  或  $x = \frac{1}{4}$ , 所以  $f(x) = 2$  的  $x$  的集合是  $\left\{\frac{1}{4}, 4\right\}$ . 故选 C.

27. 设甲、乙两个圆柱的底面面积分别为  $S_1, S_2$ , 体积为  $V_1, V_2$ , 若它们的侧面积相等且

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{16}{9}$ , 则  $\frac{V_1}{V_2}$  的值是 ( )

- A.  $\frac{2}{3}$     B.  $\frac{3}{2}$     C.  $\frac{4}{3}$     D.  $\frac{9}{4}$



27. C 解析: 设甲、乙两个圆柱的底面半径为  $R_1, R_2$ , 由  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{16}{9}$  得  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{4}{3}$ , 所以甲、乙两个圆柱的底面周长  $C_1, C_2$  满足:  $\frac{C_1}{C_2} = \frac{4}{3}$ , 又因为甲、乙两个圆柱的侧面积相等, 所以甲、乙两个圆柱的高  $H_1, H_2$  满足:  $\frac{H_1}{H_2} = \frac{3}{4}$ , 所以甲、乙两个圆柱的体积  $V_1, V_2$  满足:  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1 H_1}{S_2 H_2} = \frac{16}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$ . 故 A, B, D 错误. 故选 C.

28. 已知函数  $f(x) = a^x - 3$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ), 且  $f(1) + f(2) = -\frac{50}{9}$ , 则  $f(x)$  的零点是 ( )  
A.  $\frac{1}{2}$  B. -1 C.  $(\frac{1}{2}, 0)$  D. (-1, 0)

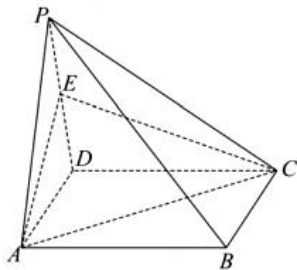
28. B 解析: 由题意可知:  $f(1) + f(2) = a + a^2 - 6 = -\frac{50}{9}$ , 化简得:  $9a^2 + 9a - 4 = 0$ , 即  $(3a-1)(3a+4) = 0$ , 解得:  $a = \frac{1}{3}$  或  $a = -\frac{4}{3}$  (舍), 所以  $f(x) = (\frac{1}{3})^x - 3$ . 令  $f(x) = 0$  可得:  $x = -1$ , 函数  $f(x)$  的零点是 -1. 故选 B.

二、解答题: 本大题共 2 小题, 共计 16 分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

29. (本小题满分 8 分)

如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面是正方形, 侧面  $PAD$  是正三角形,  $AD = 2$ , 且侧面  $PAD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $E$  为侧棱  $PD$  的中点.

- (1) 求证:  $PB \parallel$  平面  $EAC$ ;
- (2) 求三棱锥  $A-PDC$  的体积.



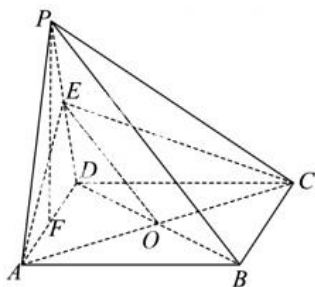
29. 解析: (1) 连接  $BD$  交  $AC$  于  $O$ , 连接  $EO$ ,  
 $\because O, E$  分别为  $BD, PD$  的中点,  
 $\therefore EO \parallel PB$ . (2 分)  
 $\because EO \subset$  平面  $EAC, PB \not\subset$  平面  $EAC$ ,  
 $\therefore PB \parallel$  平面  $EAC$ . (4 分)  
 (2) 过  $P$  作  $PFLAD$  于  $F$ ,

∵侧面 PAD 是正三角形, ∴PF⊥AD, (6 分)

∵平面 PAD ⊥底面 ABCD, 平面 PAD ∩底面 ABCD = AD, PF ⊂ 平面 PAD,

∴PF ⊥平面 ABCD,

$$\text{故 } V_{A-PDC} = V_{P-ADC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ADC} \cdot PF = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \left(2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad (8 \text{ 分})$$



30. (本小题满分 8 分)

$$\text{已知 } f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos x + \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

(1) 求  $f(x)$  的单调递增区间;

(2) 当  $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$  时, 关于  $x$  的不等式  $af\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) - f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) \geq 2$  有解, 求实数  $a$  的取值范围.

$$\begin{aligned} 30. \text{ 解析: (1) } f(x) &= \cos x \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), \quad (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$\text{令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \text{ 解得 } k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$$

所以单调递增区间为  $\left[-\frac{5}{12}\pi + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ . (4 分)

$$(2) \quad af\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) - f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = a \sin x - \cos 2x \geq 2, \quad x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right], \quad \sin x > 0,$$

即  $a \geq \frac{2 + \cos 2x}{\sin x}$  有解, 只需要  $a \geq \left(\frac{2 + \cos 2x}{\sin x}\right)_{\min}$  即可, (6 分)

$$\frac{2 + \cos 2x}{\sin x} = \frac{3 - 2\sin^2 x}{\sin x} = \frac{3}{\sin x} - 2\sin x,$$

令  $t = \sin x, t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], y = \frac{3}{t} - 2t$  为减函数,

所以当  $t = 1$  时,  $y_{\min} = 1$ , 所以  $a \geq 1$ . (8 分)

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线