湘豫名校联考
2023年11月高三一轮复习诊断考试(二)
数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	C	D	B	D	A	ACD	AD	AB	ACD

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.C 【命题意图】本题考查了绝对值不等式的解法、根据集合间的关系求参数的值,考查逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】解不等式$\left|x-\frac{3}{2}\right|<\frac{5}{2}$,得$-1<x<4$.又$x\in\mathbf{N}^*$,所以$B=\{1,2,3\}$.因为$A=\{3,a\}$,且$A\subseteq B$,所以$a=1$或2.故选C.

2.B 【命题意图】本题考查了逻辑中命题的否定,考查逻辑推理的核心素养.

【解析】因为存在量词命题的否定为全称量词命题.对命题否定需要改量词、否结论,所以命题p的否定为$\forall x\in\mathbf{R}$,$\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{2}$.故选B.

3.A 【命题意图】本题考查了复数的相关概念,考查数学运算的核心素养.

【解析】方法一:$z=\frac{-2\pm 2\mathrm{i}}{2}=-1\pm\mathrm{i}$.不妨设$z=-1+\mathrm{i}$,则$\bar{z}=-1-\mathrm{i}$,所以$z^2=-2\mathrm{i}$,$(\bar{z})^2=2\mathrm{i}$.所以$z^2+(\bar{z})^2=0$,即$|z^2+(\bar{z})^2|=0$.

方法二:因为复数z是方程$x^2+2x+2=0$的一个根,所以$\bar{z}$也是方程的一个根.因此$z+\bar{z}=-2$,$z\cdot\bar{z}=2$.所以$|z^2+(\bar{z})^2|=|(z+\bar{z})^2-2z\cdot\bar{z}|=|(-2)^2-2\times 2|=0$.故选A.

4.C 【命题意图】本题考查了函数图象的识别,考查逻辑推理、数学运算、直观想象的核心素养.

【解析】因为$f(x)=\frac{e^x\cdot e\cdot\ln|x|}{e^{2x}-1}=\frac{e\cdot\ln|x|}{e^x-e^{-x}}$,所以$f(-x)=\frac{e\cdot\ln|-x|}{e^{-x}-e^x}=-\frac{e\cdot\ln|x|}{e^x-e^{-x}}=-f(x)$,所以函数$f(x)$为奇函数,排除B,D.当$0<x<1$时,$e^{x+1}>0$,$\ln|x|<0$,$e^{2x}-1>0$,所以$f(x)=\frac{e^{x+1}\cdot\ln|x|}{e^{2x}-1}<0$,排除A.故选C.

5.D 【命题意图】本题考查了平面向量的运算,考查数学运算的核心素养.

【解析】方法一:因为$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CF})=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$.

方法二:$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AE})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$.故选D.

6.B 【命题意图】本题考查了累乘法的应用,考查逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】因为$\frac{a_{n+1}^2+a_n^2}{a_{n+1}^2-a_n^2}=2n$,所以$a_{n+1}^2+a_n^2=2n(a_{n+1}^2-a_n^2)$,即$(1-2n)a_{n+1}^2=(-2n-1)a_n^2$,得$\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2}=\frac{2n+1}{2n-1}$.

方法一:所以$a_{113}^2=\frac{a_{113}^2}{a_{112}^2}\times\frac{a_{112}^2}{a_{111}^2}\times\frac{a_{111}^2}{a_{110}^2}\times\cdots\times\frac{a_3^2}{a_2^2}\times\frac{a_2^2}{a_1^2}\times a_1^2=\frac{225}{223}\times\frac{223}{221}\times\frac{221}{219}\times\cdots\times\frac{5}{3}\times\frac{3}{1}\times 1=225$.因为$a_n>0$,所以$a_{113}=15$.

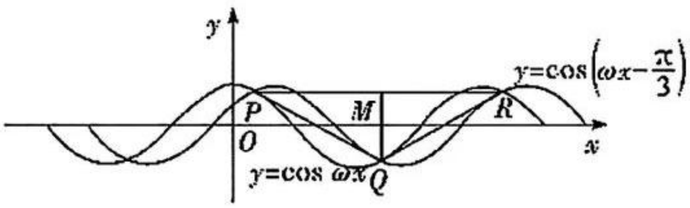
方法二：所以$\frac{a_{n+1}^2}{2n+1}=\frac{a_n^2}{2n-1}=\frac{a_{n-1}^2}{2n-3}=\cdots=\frac{a_1^2}{1}=1$. 所以$a_n^2=2n-1$. 因为$a_n>0$，所以$a_n=\sqrt{2n-1}$. 所以$a_{113}=15$. 故选 B.

7. D 【命题意图】本题考查了函数的性质，考查了数学运算的核心素养.

【解析】由题可知函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 且$f(x)$是偶函数，所以$f(\ln x)+f(-\ln x)<2$等价于$2f(\ln x)<2$，即$f(\ln x)<1$. 当$x>0$时，$f(x)=\log_2 x+x^2$，因为$y=\log_2 x$和$y=x^2$在$(0,+\infty)$上都是单调递增的，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减. 又因为$f(1)=1$，所以$|\ln x|<1$且$\ln x\neq 0$，解得$\frac{1}{e}<x<1$或$1<x<e$. 故选 D.

8. A 【命题意图】本题考查了余弦函数的图象与性质，考查逻辑推理、数学运算、直观想象的核心素养.

【解析】由题意知$g(x)=\cos\omega x$，又$f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$，由两个图象相交可得$\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\omega x$，即$\cos\omega x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\omega x\sin\frac{\pi}{3}=\cos\omega x$，化简得$\tan\omega x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$\omega x=k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$. 不妨令$k=0,1,2$，作出$f(x)$与$g(x)$的大致图象，如下图所示，



设M为PR的中点，则由$\angle PQR$为钝角，结合三角函数的对称性可知$0<\angle PRQ<\frac{\pi}{4}$，所以$0<\tan\angle PRQ<1$. 根据图象可得$|PR|=T=\frac{2\pi}{\omega}=2|MR|$，即$|MR|=\frac{\pi}{\omega}$. 易得$|QM|=\sqrt{3}$，所以$\tan\angle MRQ=\frac{|QM|}{|MR|}=\frac{\sqrt{3}\omega}{\pi}<1$，即$\omega<\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$. 所以$\omega$的取值范围为$\left(0,\frac{\sqrt{3}\pi}{3}\right)$. 故选 A.

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. ACD 【命题意图】本题考查函数与导数、基本不等式，考查数学运算的核心素养.

【解析】由题可知$f'(x)=\frac{a}{x}+b$，所以$f'(1)=a+b=2$. 对于 A：$ab=a(2-a)=-a^2+2a\leqslant 1$，当且仅当$a=b=1$时等号成立，A 正确；对于 B：令$a=3,b=-1$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{2}{3}<2$，B 错误；对于 C：因为$2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$，所以$a^2+b^2\geqslant 2$，当且仅当$a=b=1$时等号成立，C 正确；对于 D：$3^a+3^b\geqslant 2\sqrt{3^a\times 3^b}=2\sqrt{3^{a+b}}=6$，当且仅当$a=b=1$时等号成立，D 正确. 故选 ACD.

10. AD 【命题意图】本题考查了函数的奇偶性、函数的定义域与值域，考查逻辑推理、数学运算、直观想象的核心素养.

【解析】对于 A：因为$f(x)$为奇函数，所以$f(-x)+f(x)=\log_a\frac{1-kx}{1-x}+\log_a\frac{1+kx}{x+1}=\log_a\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}=0$，则$k^2=1$. 因为$k\neq 1$，所以$k=-1$，A 正确. 对于 B：令$g(x)=\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{1+x}-1$，则由$\frac{1-x}{1+x}>0$，得$-1<x<1$. 因为$g(x)$在$(-1,1)$上单调递减，所以当$0<a<1$时，$f(x)=\log_a\left(\frac{2}{1+x}-1\right)$在$x\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$上是严格增函数，所以$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=$

$\log_a\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\log_a\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=1$.所以 $a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}=2-\sqrt{3}$.B 错误. 对于 C:当 $a=10$ 时,$f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$,则由 $-1<f(x)<\lg\dfrac{1}{2}$,得 $\lg\dfrac{1}{10}<\lg\dfrac{1-x}{1+x}<\lg\dfrac{1}{2}$,所以 $\dfrac{1}{10}<\dfrac{1-x}{1+x}<\dfrac{1}{2}$,解得 $\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{9}{11}$,C 错误. 对于 D:当 $a>1$ 时,$f(x)=\log_a\left(\dfrac{2}{1+x}-1\right)$在$[0,1)$上单调递减,所以 $f(x)$在$[0,1)$上的取值范围是$(-\infty,0]$. 由题意知$(-\infty,0]$与$\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$的交集为非空,所以$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2}<0$,解得 $a>2$,D 正确. 故选 AD.

11. AB 【命题意图】本题考查了斐波那契数列,考查数学运算的核心素养.

【解析】对于①:$a_{1\,005}=a_{1\,001}+a_{1\,003}=2a_{1\,003}+a_{1\,002}$,$a_{1\,001}=a_{1\,003}-a_{1\,002}$,两式相加可得 $a_{1\,005}+a_{1\,001}=3a_{1\,003}$,所以 $k=1\,003$. 对于②:因为 $a_1a_2=a_2^2$,$a_2a_3+a_3a_4=(a_2+a_4)a_3=(a_2+a_4)(a_4-a_2)=a_4^2-a_2^2$,$a_4a_5+a_5a_6=(a_4+a_6)a_5=(a_4+a_6)(a_6-a_4)=a_6^2-a_4^2$,…,$a_{1\,000}a_{1\,001}+a_{1\,001}a_{1\,002}=(a_{1\,000}+a_{1\,002})a_{1\,001}=(a_{1\,000}+a_{1\,002})\cdot(a_{1\,002}-a_{1\,000})=a_{1\,002}^2-a_{1\,000}^2$,累加可得:$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_5+\cdots+a_{1\,001}a_{1\,002}=a_{1\,002}^2$,所以 $m=1\,002$. 故选 AB.

12. ACD 【命题意图】本题考查了函数与导数,考查数学运算的核心素养.

【解析】设 $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$,$x>-1$,且 $x\neq0$,则 $f'(x)=\dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(x+1)}{x^2}$. 令 $g(x)=\dfrac{x}{1+x}-\ln(x+1)$,$x>-1$,则$g'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{-x}{(1+x)^2}$,所以当 $-1<x<0$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;当 $x>0$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减. 所以 $g(x)\leqslant g(0)=0$,即 $f'(x)<0$,所以 $f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递减,所以 $f\left(\dfrac{1}{11}\right)>f\left(\dfrac{1}{10}\right)$,即 $11\ln\left(1+\dfrac{1}{11}\right)>10\ln\left(1+\dfrac{1}{10}\right)$,所以 $\left(1+\dfrac{1}{11}\right)^{11}>\left(1+\dfrac{1}{10}\right)^{10}$,即 $\left(\dfrac{12}{11}\right)^{11}>\left(\dfrac{11}{10}\right)^{10}$,A 正确. 因为 $-1<-\dfrac{1}{11}<-\dfrac{1}{12}$,所以 $f\left(-\dfrac{1}{11}\right)>f\left(-\dfrac{1}{12}\right)$,即 $-11\ln\left(1-\dfrac{1}{11}\right)>-12\ln\left(1-\dfrac{1}{12}\right)$,即 $11\ln\dfrac{11}{10}>12\ln\dfrac{12}{11}$. 所以$\left(\dfrac{11}{10}\right)^{11}>\left(\dfrac{12}{11}\right)^{12}$,B 错误. 对于 C:因为$\left(\dfrac{12}{11}\right)^{11}>\left(\dfrac{11}{10}\right)^{10}>0$,且$\dfrac{11}{12}>\dfrac{10}{11}>0$,所以$\left(\dfrac{12}{11}\right)^{11}\times\dfrac{11}{12}>\left(\dfrac{11}{10}\right)^{10}\times\dfrac{10}{11}$,即$\left(\dfrac{12}{11}\right)^{10}>\left(\dfrac{11}{10}\right)^{9}$,C 正确. 对于 D:因为$\left(\dfrac{11}{10}\right)^{11}>\left(\dfrac{12}{11}\right)^{12}>0$,$\dfrac{11}{10}>\dfrac{12}{11}>0$,所以$\left(\dfrac{11}{10}\right)^{11}\times\dfrac{11}{10}>\left(\dfrac{12}{11}\right)^{12}\times\dfrac{12}{11}$,即$\left(\dfrac{11}{10}\right)^{12}>\left(\dfrac{12}{11}\right)^{13}$,D 正确. 故选 ACD.

注:此题 C 选项和 D 选项也可以构造函数来解决. 对于 C:要证 C 选项,即证 $10\ln\left(1+\dfrac{1}{11}\right)>9\ln\left(1+\dfrac{1}{10}\right)$,可令 $h(x)=(x-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$,$0<x\leqslant11$. 则 $h'(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{-x+1}{x^2+x}$,$h''(x)=\dfrac{-3x-1}{(x^2+x)^2}<0$,所以$h'(x)$在$(0,11]$上单调递减. 因为 $h'(11)=\ln\dfrac{12}{11}-\dfrac{10}{132}>1-\dfrac{11}{12}-\dfrac{10}{132}=\dfrac{1}{132}>0$,所以$h(x)$在$(0,11]$上单调递增,所以 $h(11)>h(10)$,即 $10\ln\left(1+\dfrac{1}{11}\right)>9\ln\left(1+\dfrac{1}{10}\right)$,C 正确. 对于 D:$\left(\dfrac{11}{10}\right)^{12}>\left(\dfrac{12}{11}\right)^{13}$ 等价于 $12\ln\left(1+\dfrac{1}{10}\right)>13\ln\left(1+\dfrac{1}{11}\right)$,可令 $u(x)=(x+2)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$,$0<x\leqslant11$,则 $u'(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{x+2}{x^2+x}$,$u''(x)=\dfrac{3x+2}{(x^2+x)^2}>0$,所以 $u'(x)$在$(0,11]$上单调递增. 又因为 $u'(11)=\ln\dfrac{12}{11}-\dfrac{13}{132}<\dfrac{12}{11}-1-\dfrac{13}{132}=-\dfrac{1}{132}<0$,因此 $u(x)$在$(0,11]$上单调递减,所以 $u(10)>u(11)$,即 $12\ln\left(1+\dfrac{1}{10}\right)>13\ln\left(1+\dfrac{1}{11}\right)$,D 正确.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ 【命题意图】本题考查了向量的运算，考查数学运算的核心素养.

【解析】方法一：由题可知 $b-a=(1-x,1)$. 因为 b 与 $b-a$ 共线，所以 $2(1-x)=1$，即 $x=\frac{1}{2}$. 所以 $a+b=\left(\frac{3}{2},3\right)$，因此可得 $|a+b|=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

方法二：因为 b 与 $b-a$ 共线，所以 a 与 b 共线，所以 $2x-1=0$，即 $x=\frac{1}{2}$. 所以 $a+b=\left(\frac{3}{2},3\right)$，因此 $|a+b|=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

14. 2（2 分） $[-1,+\infty)$（3 分） 【命题意图】本题考查了分段函数的求值问题、分段函数的值域，考查逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】$f(e+1)=\ln e+1=2$. 当 $x<2$ 时，$f(x)=x^2+4x+3=(x+2)^2-1\geqslant-1$；当 $x\geqslant2$ 时，$f(x)=\ln(x-1)+1$，易知 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上是单调递增函数，所以 $f(x)=\ln(x-1)+1\geqslant\ln(2-1)+1=1$，所以 $f(x)$ 的值域为 $[-1,+\infty)$.

15. $\frac{1}{3\pi}$ 【命题意图】本题考查了正弦定理、三角形面积公式，考查了数学运算的核心素养.

【解析】因为 $2\sin A\cos(B-C)+\sin 2A=2\sin A\cos(B-C)+2\sin A\cos A=2\sin A\cos(B-C)-2\sin A\cos(B+C)=2\sin A[\cos(B-C)-\cos(B+C)]=4\sin A\sin B\sin C=\frac{2}{3}$，所以 $\sin A\sin B\sin C=\frac{1}{6}$. 设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R，则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}ab\sin C}{\pi R^2}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}\cdot\sin C=\frac{2}{\pi}\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C=\frac{1}{3\pi}$.

16. 1 【命题意图】本题考查了导数的综合应用，考查数学运算的核心素养.

【解析】方法一：令 $f(x)=x^a-\log_a x$，则 $f'(x)=ax^{a-1}-\frac{1}{x\ln a}=\frac{ax^a\ln a-1}{x\ln a}$. 若 $0<a<1$，则当 $x>0$，且 $x\to0$ 时，$f(x)\to-\infty$（舍），所以只需考虑 $a>1$. 当 $a>1$ 时，令 $g(x)=ax^a\ln a-1$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，当 $x>0$，且 $x\to0$ 时，$g(x)\to-1$；当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，所以存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $g(x_0)=0$，即 $x_0^a=\frac{1}{a\ln a}$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)\geqslant f(x_0)=x_0^a-\log_a x_0=\frac{1}{a\ln a}-\frac{\ln x_0}{\ln a}=\frac{1-a\ln x_0}{a\ln a}=\frac{1-\ln x_0^a}{a\ln a}=\frac{1+\ln(a\ln a)}{a\ln a}\geqslant1$，即 $1+\ln(a\ln a)\geqslant a\ln a$，所以 $\ln(a\ln a)\geqslant a\ln a-1$. 又因为 $\ln x\leqslant x-1(x>0)$，当 $x=1$ 时等号成立，所以 $\ln(a\ln a)\leqslant a\ln a-1$，所以 $\ln(a\ln a)=a\ln a-1$，所以 $a\ln a=1$.

方法二：令 $f(x)=x^a-\log_a x$，$x>0$，则 $f'(x)=ax^{a-1}-\frac{1}{x\ln a}=\frac{ax^a\ln a-1}{x\ln a}$. 因为对于 $\forall x\in(0,+\infty)$ 不等式 $f(x)=x^a-\log_a x\geqslant1$ 恒成立，又 $f(1)=1^a-\log_a 1=1$，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点. 所以 $f'(1)=a-\frac{1}{\ln a}=0$，即 $a\ln a=1$. 下证 $a\ln a=1$ 时，对于 $\forall x\in(0,+\infty)$，$f(x)\geqslant1$ 恒成立. 当 $a\ln a=1$ 时，易得 $a>1$，因为 $f'(1)=0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)\geqslant f(1)=1$，得证.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【命题意图】本题考查了三角函数的性质及应用，考查数学运算的核心素养.

【解析】(1) $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\omega x\right)=\left(\frac{1}{2}\sin\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x-\frac{1}{2}\sin\omega x\right)=$

$\frac{3}{4}\cos^2\omega x-\frac{1}{4}\sin^2\omega x=\frac{3}{8}(\cos 2\omega x+1)-\frac{1}{8}(1-\cos 2\omega x)=\frac{1}{2}\cos 2\omega x+\frac{1}{4}$. ………… 2 分

因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π，所以 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，即 $\omega=1$. 所以 $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}$. ………… 3 分

由 $2k\pi-\pi\leqslant 2x\leqslant 2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，可得 $k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi\right], k\in\mathbf{Z}$. ………… 5 分

(2) 由 (1) 知 $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}$，所以 $f\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{4}=\frac{11}{20}$，所以 $\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$.

………… 7 分

又 $\frac{\pi}{8}<\alpha<\frac{5\pi}{8}$，所以 $0<2\alpha-\frac{\pi}{4}<\pi$，所以 $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$. ………… 8 分

所以 $\cos 2\alpha=\cos\left[\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$. ………… 10 分

18.【命题意图】本题考查了等差数列的概念及错位相减法求和，考查数学运算的核心素养.

【解析】(1) 由题可知 $4a_{n+1}-2=2-\frac{1}{a_n}=\frac{2a_n-1}{a_n}$，

所以 $\frac{1}{4a_{n+1}-2}=\frac{a_n}{2a_n-1}$，所以 $\frac{1}{2a_{n+1}-1}=\frac{2a_n}{2a_n-1}=\frac{2a_n-1+1}{2a_n-1}=1+\frac{1}{2a_n-1}$.

所以 $\frac{1}{2a_{n+1}-1}-\frac{1}{2a_n-1}=1$. ………… 4 分

又 $\frac{1}{2a_1-1}=1$，

所以 $\left\{\frac{1}{2a_n-1}\right\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列. ………… 6 分

(2) 由 (1) 可得 $\frac{1}{2a_n-1}=1+(n-1)\times 1=n$，所以 $a_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{n+1}{2n}$. ………… 7 分

所以 $b_n=\frac{na_n}{2^{n-1}}=\frac{n+1}{2^n}$. ………… 8 分

所以 $T_n=\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n+1}{2^n}$. ………… 9 分

所以 $\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}$.

两式相减，得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^{n+1}}$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}$. ………… 11 分

所以 $T_n=3-\frac{n+3}{2^n}$. ………… 12 分

19.【命题意图】本题考查了余弦定理、正弦定理、基本不等式，考查逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)因为 $a\cos C+c\cos A=a\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b$,

所以由 $\dfrac{a-c}{a\cos C+c\cos A}=\dfrac{b-c}{a+c}$，得 $\dfrac{a-c}{b}=\dfrac{b-c}{a+c}$，整理得 $b^2+c^2-a^2=bc$.

由余弦定理，得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$.

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ………………………………………………………… 5 分

(2)方法一：因为 a 为定值，所以当△ABC 周长的最大值 $3\sqrt{3}$ 时，$b+c$ 取得最大值.

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc\geqslant(b+c)^2-\dfrac{3}{4}(b+c)^2=\dfrac{1}{4}(b+c)^2$, ………………… 7 分

整理得 $b+c\leqslant 2a$，当且仅当 $b=c$ 时，等号成立，

所以△ABC 的周长为 $a+b+c\leqslant 3a$. ……………………………………………………………… 9 分

所以由 $3a=3\sqrt{3}$，得 $a=\sqrt{3}$.

由正弦定理得 $2R=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=2$，即 $R=1$,

故△ABC 的外接圆半径 R 为 1. …………………………………………………………………… 12 分

方法二：由正弦定理得 $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$，$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$,

所以 $a+b+c=a+\dfrac{a\sin B}{\sin A}+\dfrac{a\sin C}{\sin A}$

$=a\left\{1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left[\sin B+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-B\right)\right]\right\}=a\left[1+2\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$. ………………………………… 9 分

因为 $B\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$，所以当 $B=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$(a+b+c)_{\max}=3a=3\sqrt{3}$，所以 $a=\sqrt{3}$.

所以 $R=\dfrac{a}{2\sin A}=1$.

故△ABC 的外接圆半径 R 为 1. …………………………………………………………………… 12 分

20.【命题意图】本题考查了导数的综合应用，考查了数学运算的核心素养.

【解析】(1)$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

因为 $f(x)=-2x^3+6ax^2-1$，所以 $f'(x)=-6x^2+12ax=-6x(x-2a)$. ……………………………… 1 分

由 $f'(x)=0$ 可得 $x_1=0$，$x_2=2a$,

①当 $a<0$ 时，$2a<0$，当 $x<2a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $2a<x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

②当 $a=0$ 时，$2a=0$，$f'(x)\leqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；

③当 $a>0$ 时，$2a>0$，当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $0<x<2a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x>2a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. ……………………… 4 分

综上所述：①当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(2a,0)$ 上单调递增，在 $(-\infty,2a)$，$(0,+\infty)$ 上单调递减；

②当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减；

③当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,2a)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0)$，$(2a,+\infty)$ 上单调递减. ………………………… 5 分

(2)因为 $\exists x_1\in(0,+\infty)$，$\exists x_2\in\mathbf{R}$ 使得 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$ 成立，所以 $f(x)_{\max}\geqslant g(x)_{\min}$. ………………… 6 分

因为 $g'(x)=e^x-2a$，所以当 $a>0$ 时，由 $g'(x)=0$ 可得 $x=\ln(2a)$。

当 $x<\ln(2a)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x>\ln(2a)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增。

所以 $g(x)_{\min}=g(\ln(2a))=2a-2a\ln(2a)-1$。 …………………………………………………… 8 分

由(1)可得当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,2a)$，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(2a,+\infty)$，

所以在 $(0,+\infty)$ 上，$f(x)_{\max}=f(2a)=8a^3-1$，所以 $2a-2a\ln(2a)-1\leqslant 8a^3-1$，即 $\ln(2a)+(2a)^2-1\geqslant 0$。

…………………………………………………………………………………………………… 10 分

令 $h(t)=\ln t+t^2-1,t>0$，则 $h'(t)=\dfrac{1}{t}+2t>0$，所以 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

又因为 $h(1)=0$，所以 $2a\geqslant 1$，即 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$。

所以实数 a 的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$。 ……………………………………………………… 12 分

21.【命题意图】本题考查了数列的综合应用，考查数学运算的核心素养。

【解析】(1)因为 $b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n=0$，所以 $\{b_n\}$ 为等差数列。

因为 $b_1=\dfrac{S_1}{a_1}=1,b_2=\dfrac{S_2}{a_2}=\dfrac{3}{2}$，所以 $b_2-b_1=\dfrac{1}{2}$，

所以数列 $\{b_n\}$ 的首项为 1，公差为 $\dfrac{1}{2}$，所以 $b_n=1+(n-1)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{n+1}{2}$。 ……………………………… 2 分

所以 $\dfrac{S_n}{a_n}=\dfrac{n+1}{2}$，即 $S_n=\dfrac{n+1}{2}a_n$。

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=\dfrac{n}{2}a_{n-1}$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n+1}{2}a_n-\dfrac{n}{2}a_{n-1}$，化简可得 $\dfrac{n-1}{2}a_n=\dfrac{n}{2}a_{n-1}(n\geqslant 2)$。 ……………………………… 4 分

所以 $\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_{n-1}}{n-1}(n\geqslant 2)$，所以数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 是常数列，即 $\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_1}{1}=1$，所以 $a_n=n$。 ……………………… 6 分

(2)由(1)可知 $c_n=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2n+3}{(n+1)(n+2)}=(-1)^{n+1}\times\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\right)$， ……………………… 8 分

所以 $T_n=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\right)-\cdots+(-1)^n\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)+(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\right)=$

$\dfrac{1}{2}+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n+2}$。 …………………………………………………………………………… 10 分

当 n 为奇数时，$T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n+2}$，$\{T_n\}$ 是关于 n 单调递减的数列，所以 $\dfrac{1}{2}<T_n\leqslant T_1$，即 $\dfrac{1}{2}<T_n\leqslant\dfrac{5}{6}$；

当 n 为偶数时，$T_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}$，$\{T_n\}$ 是关于 n 单调递增的数列，所以 $T_2\leqslant T_n<\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{1}{4}\leqslant T_n<\dfrac{1}{2}$。

所以 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 的最大值为 $T_1=\dfrac{5}{6}$，最小值为 $T_2=\dfrac{1}{4}$。 …………………………………… 12 分

22.【命题意图】本题考查了导数的综合应用，考查了数学运算的核心素养。

【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\ln x-2ax+1$，

因为 $f(x)$ 在定义域内单调递减，

所以 $f'(x)=\ln x-2ax+1\leqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $2a\geqslant\dfrac{\ln x+1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立。 ………… 2 分

令 $g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，则 $g'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$. 易得 $g'(1)=0$.

所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.

所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(1)=1$，因此 $2a\geqslant 1$，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$，经检验可得 $a=\frac{1}{2}$ 满足条件，

所以实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. ………………………………………………………… 4 分

(2) 由(1)可知 $f'(x)=\ln x-2ax+1$，

因为 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，

所以 $\ln x-2ax+1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上的两个根为 x_1,x_2，

所以 $2a=\frac{\ln x+1}{x}$，所以 $2a=\frac{\ln x_1+1}{x_1}=\frac{\ln x_2+1}{x_2}$. ………………………………………… 6 分

由(1)令 $g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，由(1)可知 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，且 $g\left(\frac{1}{e}\right)=0$，

当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，所以 $0<2a<1$，即 $0<a<\frac{1}{2}$.

因为 $\ln x_1-2ax_1+1=0$，$\ln x_2-2ax_2+1=0$，

所以 $2a=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$. ………………………………………………………………………… 7 分

因为 $\ln x_1^2x_2^3=2\ln x_1+3\ln x_2=2(2ax_1-1)+3(2ax_2-1)=4ax_1+6ax_2-5=(2x_1+3x_2)\cdot\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}-5=\frac{2+\frac{3x_2}{x_1}}{\frac{x_2}{x_1}-1}\ln\frac{x_2}{x_1}-5$，令 $t=\frac{x_2}{x_1}(t>2)$，则 $2\ln x_1+3\ln x_2=\frac{2+3t}{t-1}\ln t-5$. ………………………… 9 分

令 $h(t)=\frac{2+3t}{t-1}\ln t-5$，$t>2$，则 $h'(t)=\frac{3t-5\ln t-\frac{2}{t}-1}{(t-1)^2}$.

令 $u(t)=3t-5\ln t-\frac{2}{t}-1$，$t>2$，则 $u'(t)=3-\frac{5}{t}+\frac{2}{t^2}=\frac{(3t-2)(t-1)}{t^2}>0$，所以 $u(t)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $u(t)>u(2)=4-5\ln 2>0$. 所以 $h'(t)>0$. 即 $h(t)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $h(t)>h(2)=8\ln 2-5>\frac{1}{2}$，即 $2\ln x_1+3\ln x_2>\frac{1}{2}$，所以 $x_1^2x_2^3>\sqrt{e}$. ………………………… 12 分

关于我们

务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。