

“天一大联考·皖豫名校联盟”2024届高中毕业班第二次考试

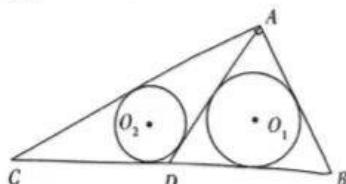
数 学

考生注意：

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上, 并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{y | y = \lg(x^2 + 1)\}$, 集合 $B = \left\{x \left| \frac{2x+2}{x-3} \leq 1\right.\right\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{x | 0 \leq x < 3\}$ B. $\{x | -5 \leq x < 3\}$ C. $\{x | -5 \leq x \leq 3\}$ D. \emptyset
2. 若复数 z 满足 $(1+i)z = 1+2i$, 则 z 的虚部为
A. $\frac{i}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{i}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
3. 已知向量 $m = (ax, 2)$, $n = (x, 1-2ax)$, 命题 $p: \exists x \in \mathbb{R}, m \cdot n < 0$. 若 p 是假命题, 则实数 a 的取值范围是
A. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ D. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$
4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = pn^2 + qn + r$ (p, q, r 为常数, 且 $p \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$), 则“ $\{a_n\}$ 是等差数列”是“ $r=0$ ”的
A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 已知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 函数 $f(x) = e^x + e^{-x}$, 则下列结论中一定成立的是
A. $f(-\sin A) > f(\cos B)$ B. $f(\cos C) > f(\sin B)$
C. $f(\cos A) > f(-\sin C)$ D. $f(\sin C) > f(-\sin B)$
6. 某中学开展结合学科知识的动手能力大赛, 参赛学生甲需要加工一个外轮廓为三角形的模具, 原材料为如图所示的 $\triangle ABC$, $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$, D 是边 BC 上一点, $\angle ABD = \angle ADB$, $AC = 3$ cm, $CD = \sqrt{3}$ cm, 要求分别把 $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ 的内切圆 O_1 , O_2 .



O_2 裁去, 则裁去的圆 O_1, O_2 的面积之和为

- A. $(16\sqrt{3} - 9)\pi \text{ cm}^2$ B. $(6 - 3\sqrt{3})\pi \text{ cm}^2$
C. $(16 - 9\sqrt{3})\pi \text{ cm}^2$ D. $\frac{(\sqrt{3} - 1)\pi}{2} \text{ cm}^2$

7. 有甲、乙等五人到三家企业去应聘, 若每人至多被一家企业录用, 每家企业至少录用其中一人且甲、乙两人不能被同一家企业录用, 则不同的录用情况种数是

- A. 60 B. 114 C. 278 D. 336

8. 若函数 $f(x) = x^2 - axe^x + ae^{2x+1}$ 有三个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是

- A. $\left(-\frac{1}{e^2} - 1, 0\right)$ B. $\left(0, \frac{1}{e^2} + 1\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{e^3 - e}\right)$ D. $\left(\frac{1}{e - e^3}, 0\right)$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列说法错误的是

- A. 当样本相关系数 r 满足 $|r| = 1$ 时, 成对样本数据的两个分量之间满足一种线性关系
B. 残差等于预测值减去观测值
C. 决定系数 R^2 越大, 模型拟合效果越差
D. 在独立性检验中, 当 $\chi^2 \geq x_{\alpha}$ (x_{α} 为 α 的临界值) 时, 推断零假设 H_0 不成立

10. 已知函数 $f(x) = \cos 2x - \sin x$, 则

- A. $f(x)$ 是奇函数 B. $f(x)$ 最小的 10 个正零点之和为 $\frac{95\pi}{3}$
C. 2π 是 $f(x)$ 的一个周期 D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y = -x + 1$

11. 若正实数 x, y, z 满足 $xyz(x+y+z) = 1$, 记 $S = (x+z)(y+z)$, 则

- A. S 的最小值是 2 B. 当 S 取最小值时, z 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. 当 S 取最小值时, z 的最大值为 $\sqrt{2} - 1$ D. 当 S 取最小值时, 一定有 $x = y$

12. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 在棱 A_1B_1 上运动, 点 F 在正方体表面上运动, 则

- A. 存在点 E , 使 $AE \perp DB_1$
B. 当 $\frac{A_1E}{EB_1} = \sqrt{3}$ 时, 经过点 A, C, E 的平面将正方体分成体积比为 3:1 的大小两部分
C. 当 $FA = FB$ 时, 点 F 的轨迹长度为 4
D. 当 $FA = 2FB$ 时, 点 F 的轨迹长度为 $\frac{(8 + 3\sqrt{3})\pi}{18}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知直线 l 经过 $A(-1, -1, 0), B(1, -1, 2)$ 两点, 则点 $P(-1, 1, 2)$ 到直线 l 的距离为 _____.

14. 为提高学生的数学核心素养和学习数学的兴趣, 学校在高一年级开设了《数学探究与发现》选修课. 在某次主题是“向量与不等式”的课上, 学生甲运用平面向量的数量积知识证

明了著名的柯西不等式(二维):当向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2)$ 时,有 $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$, 即 $(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$, 当且仅当 $x_1y_2 = x_2y_1$ 时等号成立; 学生乙从这个结论出发, 作一个代数变换, 得到了一个新不等式: $(x_1x_2 - y_1y_2)^2 \geq (x_1^2 - y_1^2)(x_2^2 - y_2^2)$, 当且仅当 $x_1y_2 = x_2y_1$ 时等号成立, 并取名为“类柯西不等式”. 根据前面的结论可知: 当 $x \in \mathbb{R}$ 时,

$$\frac{1}{2x^2+1} - \frac{2}{x^2+1}$$
 的最小值是 _____.

15. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$, $\triangle ABC$ 是以点 $B(0, 1)$ 为直角顶点的等腰直角三角形, 直角边 BA, BC 与椭圆分别交于另外两点 A, C . 若这样的 $\triangle ABC$ 有且仅有一个, 则该椭圆的离心率的取值范围是 _____.
16. 从教学楼一楼到二楼共有 11 级台阶(从下往上依次为第 1 级, 第 2 级, …, 第 11 级), 学生甲一步能上 1 级或 2 级台阶, 若甲从一楼上到二楼使用每一种方法都是等概率的, 则甲踩过第 5 级台阶的概率是 _____.

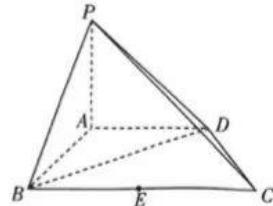
四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AD \perp PA, E$ 为棱 BC 的中点, $BD = CD = 2\sqrt{2}, AD = \frac{1}{2}BC = 2$.

(Ⅰ) 求证: $AD \perp PB$;

(Ⅱ) 若 $PB = PD = 2\sqrt{2}$, 求 PB 与平面 PCD 所成角的余弦值.



18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $2\cos A \cos C = \frac{\tan B}{\tan A + \tan C}$

(Ⅰ) 求角 B ;

(Ⅱ) 若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 且 $b = 2$, 求 $a + c$ 的取值范围.

19. (12 分)

某工厂生产一批螺丝钉, 长度均为整数, 且在 24 mm 至 50 mm 之间, 技术监督组为了解生产的螺丝钉质量, 按照长度分为 9 组, 每组抽取 150 个对其中的优质螺丝钉个数进行统计, 数据如下:

长度区间	[24, 26]	[27, 29]	[30, 32]	[33, 35]	[36, 38]	[39, 41]	[42, 44]	[45, 47]	[48, 50]
优质个数	81	81	84	88	84	83	83	70	66

(I) 设每个长度区间的中点值为 x , 优质个数为 y , 求 y 关于 x 的回归直线方程. 若该厂又生产了一批长度区间为 $[54, 56]$ 的螺丝钉, 并从中随机抽取 150 个, 请根据回归直线方程预测这 150 个中的优质个数.

(II) 若在某一长度区间内有超过半数的螺丝钉是优质的, 则认为从该长度区间内任选一个均为优质的, 否则不是. 现从 $[24, 26], [33, 35], [39, 41], [45, 47], [48, 50]$ 这五个长度区间中各随机抽取一个, 再从这 5 个螺丝钉中任选 3 个, 记随机变量 X 为其中的优质个数, 求 X 的分布列与数学期望.

$$(\text{参考公式和数据: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \sum_{i=1}^9 x_i y_i = 26340, \sum_{i=1}^9 y_i = 720)$$

20. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 且 $a_1 = \frac{1}{3}$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1}^2 = b_n b_{n+2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 且 $b_1 = \left[\sum_{i=1}^{2023} \frac{1}{a_i + 1} \right]$ ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数), $b_2 = 32$.

(I) 求 b_1 ;

(II) 令 $c_n = \frac{1}{\sqrt{\log_2 b_n}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n > \frac{\sqrt{4n+1}}{2} - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

21. (12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$), F_1, F_2 分别是 C 的左、右焦点. 若 C 的离心率 $e = 2$, 且点 $(4, 6)$ 在 C 上.

(I) 求 C 的方程.

(II) 若过点 F_2 的直线 l 与 C 的左、右两支分别交于 A, B 两点(不同于双曲线的顶点),

问: $\left| \frac{1}{|AF_2|} - \frac{1}{|BF_2|} \right|$ 是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = 2e^x - x^2 + ax - 2$.

(I) 若 $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(x) > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(II) 证明: 对任意正整数 n , 都有不等式 $\sum_{k=1}^n (e^{ek} - e^k) > \frac{(n+1)e^{n+1} - 2e}{2(e-1)} + \frac{e^2 - e^{n+1}}{2(e-1)^2} + n$ 成立.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线