

“天一大联考·皖豫名校联盟”2024 届高中毕业班第二次考试

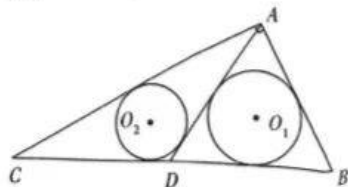
数 学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{y | y = \lg(x^2 + 1)\}$ ，集合 $B = \left\{x \left| \frac{2x+2}{x-3} \leq 1 \right.\right\}$ ，则 $A \cap B =$
 A. $\{x | 0 \leq x < 3\}$ B. $\{x | -5 \leq x < 3\}$ C. $\{x | -5 \leq x \leq 3\}$ D. \emptyset
2. 若复数 z 满足 $(1+i)z = 1+2i$ ，则 z 的虚部为
 A. $\frac{i}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{i}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
3. 已知向量 $m = (ax, 2)$ ， $n = (x, 1-2ax)$ ，命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, m \cdot n < 0$ 。若 p 是假命题，则实数 a 的取值范围是
 A. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ D. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$
4. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = pn^2 + qn + r$ (p, q, r 为常数，且 $p \neq 0, n \in \mathbf{N}^*$)，则“ $\{a_n\}$ 是等差数列”是“ $r=0$ ”的
 A. 充要条件 B. 充分不必要条件
 C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 已知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，函数 $f(x) = e^x + e^{-x}$ ，则下列结论中一定成立的是
 A. $f(-\sin A) > f(\cos B)$ B. $f(\cos C) > f(\sin B)$
 C. $f(\cos A) > f(-\sin C)$ D. $f(\sin C) > f(-\sin B)$
6. 某中学开展结合学科知识的动手能力大赛，参赛学生甲需要加工一个外轮廓为三角形的模具，原材料为如图所示的 $\triangle ABC$ ， $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ ， D 是边 BC 上一点， $\angle ABD = \angle ADB$ ， $AC = 3$ cm， $CD = \sqrt{3}$ cm，要求分别把 $\triangle ABD$ ， $\triangle ACD$ 的内切圆 O_1 ，



数学试题 第 1 页(共 4 页)

明了著名的柯西不等式(二维):当向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$ 时,有 $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$, 即 $(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$, 当且仅当 $x_1 y_2 = x_2 y_1$ 时等号成立; 学生乙从这个结论出发, 作一个代数变换, 得到了一个新不等式: $(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 \geq (x_1^2 - y_1^2)(x_2^2 - y_2^2)$, 当且仅当 $x_1 y_2 = x_2 y_1$ 时等号成立, 并取名为“类柯西不等式”. 根据前面的结论可知: 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $\frac{1}{2x^2 + 1} - \frac{2}{x^2 + 1}$ 的最小值是_____.

15. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$, $\triangle ABC$ 是以点 $B(0, 1)$ 为直角顶点的等腰直角三角形, 直角边 BA, BC 与椭圆分别交于另外两点 A, C . 若这样的 $\triangle ABC$ 有且仅有一个, 则该椭圆的离心率的取值范围是_____.
16. 从教学楼一楼到二楼共有 11 级台阶(从下往上依次为第 1 级, 第 2 级, ..., 第 11 级), 学生甲一步能上 1 级或 2 级台阶, 若甲从一楼上到二楼使用每一种方法都是等概率的, 则甲踩过第 5 级台阶的概率是_____.

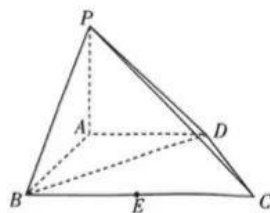
四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD \perp PA$, E 为棱 BC 的中点, $BD = CD = 2\sqrt{2}$, $AD = \frac{1}{2}BC = 2$.

(I) 求证: $AD \perp PB$;

(II) 若 $PB = PD = 2\sqrt{2}$, 求 PB 与平面 PCD 所成角的余弦值.



18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $2\cos A \cos C = \frac{\tan B}{\tan A + \tan C}$

(I) 求角 B ;

(II) 若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 且 $b = 2$, 求 $a + c$ 的取值范围.

19. (12 分)

某工厂生产一批螺丝钉, 长度均为整数, 且在 24 mm 至 50 mm 之间, 技术监督组为了解生产的螺丝钉质量, 按照长度分为 9 组, 每组抽取 150 个对其中的优质螺丝钉个数进行统计, 数据如下:

长度区间	[24, 26]	[27, 29]	[30, 32]	[33, 35]	[36, 38]	[39, 41]	[42, 44]	[45, 47]	[48, 50]
优质个数	81	81	84	88	84	83	83	70	66

- (I) 设每个长度区间的中点值为 x , 优质个数为 y , 求 y 关于 x 的回归直线方程. 若该厂又生产了一批长度区间为 $[54, 56]$ 的螺丝钉, 并从中随机抽取 150 个, 请根据回归直线方程预测这 150 个中的优质个数.
- (II) 若在某一长度区间内有超过半数的螺丝钉是优质的, 则认为从该长度区间内任选一个均为优质的, 否则不是. 现从 $[24, 26]$, $[33, 35]$, $[39, 41]$, $[45, 47]$, $[48, 50]$ 这五个长度区间中各随机抽取一个, 再从这 5 个螺丝钉中任选 3 个, 记随机变量 X 为其中的优质个数, 求 X 的分布列与数学期望.

(参考公式和数据: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$, $\sum_{i=1}^9 x_i y_i = 26\ 340$, $\sum_{i=1}^9 y_i = 720$)

20. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n^2 + a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $a_1 = \frac{1}{3}$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1}^2 = b_n b_{n+2} (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $b_1 = \left[\sum_{i=1}^{2023} \frac{1}{a_i + 1} \right]$ ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数), $b_2 = 32$.

(I) 求 b_1 ;

(II) 令 $c_n = \frac{1}{\sqrt{\log_2 b_n}} (n \in \mathbf{N}^*)$, 记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n > \frac{\sqrt{4n+1}}{2} - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

21. (12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, F_1, F_2 分别是 C 的左、右焦点. 若 C 的离心率 $e = 2$, 且点 $(4, 6)$ 在 C 上.

(I) 求 C 的方程.

(II) 若过点 F_2 的直线 l 与 C 的左、右两支分别交于 A, B 两点 (不同于双曲线的顶点),

问: $\left| \frac{1}{|AF_2|} - \frac{1}{|BF_2|} \right|$ 是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = 2e^x - x^2 + ax - 2$.

(I) 若 $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(x) > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(II) 证明: 对任意正整数 n , 都有不等式 $\sum_{k=1}^n (e^{e^k} - e^k) > \frac{(n+1)e^{n+1} - 2e}{2(e-1)} + \frac{e^2 - e^{n+1}}{2(e-1)^2} + n$ 成立.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线