长郡中学2023年下学期高二期中考试

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	D	B	A	A	C	B	ACD	AB	AD	BCD

一、选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. C 【解析】$\because \boldsymbol{v}=-3\boldsymbol{u}$,$\therefore \boldsymbol{v}/\!/\boldsymbol{u}$.故$\alpha/\!/\beta$.

2. A 【解析】不妨设分的面包,从小到大依次为a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,前n项和为S_n,

依题意得$\frac{1}{7}(a_3+a_4+a_5)=a_1+a_2$,

故$3a_1+9d=7(2a_1+d)$,$2d=11a_1$,

由$S_5=5a_3=5(a_1+2d)=100$,

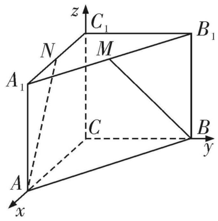
得$a_1+2d=12a_1=20$,

解得$a_1=\frac{5}{3}$.故选A.

3. D 【解析】由两直线相互垂直,其斜率分别为k_1,k_2,则$k_1\cdot k_2=-1$,可得$3\cdot k=-1$,解得$k=-\frac{1}{3}$,故选D.

4. B 【解析】由题意可知$CC_1\perp$平面ABC,且$\angle BCA=90^\circ$,

如图,以点C为坐标原点,CA,CB,CC_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立如图所示的空间直角坐标系.



设$BC=CA=CC_1=2$,

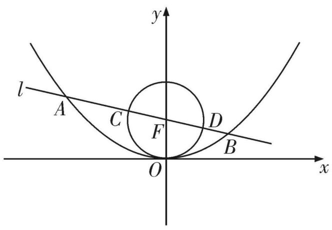
则$A(2,0,0)$,$B(0,2,0)$,$N(1,0,2)$,$M(1,1,2)$,

$\overrightarrow{AN}=(-1,0,2)$,$\overrightarrow{BM}=(1,-1,2)$,$|\cos\langle\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BM}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{AN}|\cdot|\overrightarrow{BM}|}=\frac{|3|}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

故BM与NA所成的角的余弦值为$\frac{\sqrt{30}}{10}$.故选B.

5. A 【解析】由题意知$c=\sqrt{5}$,设双曲线的方程为$x^2-4y^2=\lambda(\lambda>0)$,$\therefore \frac{x^2}{\lambda}-\frac{y^2}{\frac{\lambda}{4}}=1$,$\therefore \lambda+\frac{\lambda}{4}=5$,$\therefore \lambda=4$.故选A.

6. A 【解析】由抛物线$E:x^2=4y$可知焦点为$F(0,1)$,



设直线的方程为$x=m(y-1)$,

由$\begin{cases}x=m(y-1),\\x^2=4y,\end{cases}$得$m^2y^2-(2m^2+4)y+m^2=0$,

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$y_1y_2=1$,

由抛物线的定义可知$|AF|=y_1+1$,$|BF|=y_2+1$,

$\therefore |AC|=y_1$,$|BD|=y_2$,

$\therefore |AC|\times|BD|=y_1y_2=1$,选A.

当且仅当$y_1=2y_2$,即$y_1=\sqrt{2}$,$y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号.故选A.

7. C 【解析】$\because a_1>0$，$\{a_n\}$为递增数列，则 $a_2>0,a_3>0,\cdots a_n>0$ 恒成立. $\therefore a_n>0$，

则由 $2a_{n+1}a_n+a_{n+1}-3a_n=0(n\in\mathbf{N}^*)$ 可得 $a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{2a_n+1}$，

又 $a_{n+1}>a_n$ 恒成立，

即$\dfrac{3a_n}{2a_n+1}>a_n\Rightarrow\dfrac{3}{2a_n+1}>1\Rightarrow 0<a_n<1$ 恒成立，所以 $0<a_1<1$.

又函数 $f(x)=\dfrac{3x}{2x+1}$在区间$(0,1)$上递增，所以当 $0<x<1$ 时，$f(0)<f(x)<f(1)$，可得 $0<f(x)<1$.

当 $0<a_1<1$ 时，$a_2=f(a_1)\in(0,1)$，于是可得 $a_2<a_3$. 依此类推，可得$\{a_n\}$是递增数列. 所以 a_1 的取值范围即为$(0,1)$，故选 C.

8. B 【解析】椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点 A 关于原点的对称点为 B 点，F 为其右焦点，设左焦点为 F'.

$\therefore |AF'|+|AF|=2a$，根据对称关系知四边形 $AF'BF$ 为矩形，

$\therefore |AB|=|FF'|=2c$. 由于 $AF\perp BF$，$\angle ABF=\alpha$，$\therefore |AF|=2c\sin\alpha$，$|AF'|=2c\cos\alpha$，

$\therefore 2c\sin\alpha+2c\cos\alpha=2a$，$\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$，

由于 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right)$，故 $\alpha+\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{7\pi}{12}\right)$，$\therefore\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}<\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)<1$，

$\therefore\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}<\sqrt{3}-1$，

即离心率的取值范围是$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}-1\right)$.

9. ACD 【解析】对于 A、B，若 $l/\!/\alpha$，则 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，$\therefore\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，即 $1+2(a+b)+3(a-b)=0$，即 $5a-b+1=0$，A 正确，B 错误；

对于 C、D，若 $l\perp\alpha$，则 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，$\therefore\dfrac{1}{1}=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{a-b}{3}$，$\therefore a+b-2=0$ 且 $a-b-3=0$，C、D 正确. 故选 ACD.

10. AB 【解析】对于 A，$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1q^{n-1}}=\dfrac{1}{a_1}\cdot\left(\dfrac{1}{q}\right)^{n-1}$，$\therefore$数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是以$\dfrac{1}{a_1}$为首项，$\dfrac{1}{q}$为公比的等比数列，A 正确；

对于 B，$\dfrac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=q^2$，$\therefore$数列$\{a_na_{n+1}\}$是以 a_1a_2 为首项，q^2 为公比的等比数列，B 正确；

对于 C，当 $a_n=1$ 时，$\lg(a_n^2)=0$，数列$\{\lg(a_n^2)\}$不是等比数列，C 错误；

对于 D，当 $q=-1$ 时，$a_n+a_{n+1}=0$，数列$\{a_n+a_{n+1}\}$不是等比数列，D 错误. 故选 AB.

11. AD 【解析】对于 A，$1\cdot p+(-p)\cdot 1=0$，$\therefore l_1\perp l_2$，A 正确；

对于 B，l_1 恒过定点 $A(2,1)$，l_2 恒过定点 $B(-2,4)$，

由选项 A 正确可推得，$MA^2+MB^2=AB^2=25\geqslant 2MA\cdot MB$，$\therefore MA\cdot MB$ 的最大值是$\dfrac{25}{2}$，B 错误；

对于 C，设 $M(x,y)$，则$(x-2)^2+(y-1)^2+(x+2)^2+(y-4)^2=25$，

化简有 $x^2+y^2-5y=0$，C 错误；

对于 D，设$\angle MAB=\theta$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $MA=5\cos\theta$，$MB=5\sin\theta$，

$\therefore MA+2MB=5(\cos\theta+2\sin\theta)=5\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)\leqslant 5\sqrt{5}$，即 $MA+2MB$ 的最大值为 $5\sqrt{5}$，D 正确. 故选 AD.

12. BCD 【解析】对于 A，当以 AB 为直径作圆 M，且 AB 经过焦点 F 时，$|MN|=\dfrac{1}{2}(|AF|+|BF|)=\dfrac{1}{2}|AB|$，

此时圆 M 与准线相切，当直线 l 不经过焦点 F 时，圆 M 不一定与准线相切，故 A 错误；

对于 B，过 F 的直线 l 的方程设为 $x=my+\dfrac{p}{2}$，联立$\begin{cases}y^2=2px,\\ x=my+\dfrac{p}{2},\end{cases}$ 可得 $y^2-2pmy-p^2=0$，

$y_1y_2=-p^2$，$x_1x_2=\dfrac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=\dfrac{1}{4}p^2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{1}{4}p^2-p^2=-12(p>0)$，解得 $p=4$，B 正确；

对于 C，$\overrightarrow{AF}=\left(\dfrac{p}{2}-x_1,-y_1\right)$，$\overrightarrow{FB}=\left(x_2-\dfrac{p}{2},y_2\right)$，$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，

可得$\dfrac{p}{2}-x_1=3\left(x_2-\dfrac{p}{2}\right)$，$-y_1=3y_2$，又 $y_1y_2=-p^2$，$x_1x_2=\dfrac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=\dfrac{1}{4}p^2$，

可求出 $A\left(\dfrac{3p}{2},\sqrt{3}p\right)$，$B\left(\dfrac{p}{6},-\dfrac{\sqrt{3}p}{3}\right)$，$k_l=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{\sqrt{3}p+\frac{\sqrt{3}p}{3}}{\frac{3p}{2}-\frac{p}{6}}=\sqrt{3}$，

∴直线 l 的倾斜角为$\frac{\pi}{3}$,C 正确;

对于 D,设 $AF=a,BF=b$,由抛物线的定义可得$|MN|=\frac{1}{2}(|AF|+|BF|)=\frac{1}{2}(a+b)$,

以 AB 为直径的圆 M 经过焦点 F,∴$AF\perp BF$,$|AB|=\sqrt{a^2+b^2}$,

$$\frac{|AB|}{|MN|}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{\sqrt{(a+b)^2-2ab}}{\frac{1}{2}(a+b)}\geqslant\frac{\sqrt{(a+b)^2-\frac{(a+b)^2}{2}}}{\frac{1}{2}(a+b)}=\sqrt{2},$$

当且仅当 $a=b$ 时,即 $AF=BF$ 时等号成立,D 正确. 故选 BCD.

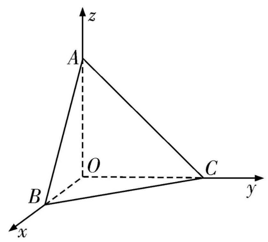
三、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 32π **【解析】**因为圆 M 与直线 $x-7y+2=0$ 相切,

所以点 $M(3,-5)$ 到直线 $x-7y+2=0$ 的距离即为圆 M 的半径,

所以 $r=\frac{|3-7\times(-5)+2=0|}{\sqrt{1+(-7)^2}}=\frac{40}{5\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$,圆 C 的面积为 32π.

14. $\frac{3\sqrt{17}}{17}$ **【解析】**构建以 O 为原点,$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}$为 x、y、z 轴的正方向的空间直角坐标系,如下图所示,



∴$A(0,0,3)$,$B(2,0,0)$,$C(0,3,0)$,则$\overrightarrow{AB}=(2,0,-3)$,$\overrightarrow{AC}=(0,3,-3)$,$\overrightarrow{OB}=(2,0,0)$,

若 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$是平面 ABC 的一个法向量,则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=2x-3z=0,\\\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{m}=3y-3z=0,\end{cases}$

令 $y=1$,则 $\boldsymbol{m}=\left(\frac{3}{2},1,1\right)$,

∴$|\cos\langle\overrightarrow{OB},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{OB}||\boldsymbol{m}|}\right|=\frac{3}{2\times\frac{\sqrt{17}}{2}}=\frac{3\sqrt{17}}{17}$,

故直线 OB 与平面 ABC 所成角的正弦值为$\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

15. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ **【解析】**由 $\sin\angle PF_2F_1=3\sin\angle PF_1F_2$ 得$|PF_1|=3|PF_2|$,

由双曲线的定义可得$|PF_1|-|PF_2|=2|PF_2|=2a$,

所以$|PF_2|=a$,$|PF_1|=3a$;

因为$\angle F_1PF_2=60^\circ$,由余弦定理可得 $4c^2=9a^2+a^2-2\times3a\cdot a\cdot\cos 60^\circ$,

整理可得 $4c^2=7a^2$,所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{7}{4}$,即 $e=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

16. (1)2^8(或 256) (2)1897

【解析】对数列进行分组如图:

2^0	1
$2^0,2^1$	2
$2^0,2^1,2^2$	3
⋮	⋮
$2^0,2^1,2^2,\cdots,2^k$	$k+1$

(1)由 $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}\leqslant100$ 可得 $k\leqslant13$,且 $1+2+3+\cdots+13=91$,所以该数列的第 100 项在第 14 组的第 9 个数,即 $2^8=256$.

(2)该数列前 k 组的项数和为 $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$,

由题意可知 $N>1000$，即$\frac{k(k+1)}{2}>1000$，解得 $k\geqslant 45$，$n\in\mathbf{N}^*$

即 N 出现在第 44 组之后.

又第 k 组的和为$\frac{1-2^k}{1-2}=2^k-1$

前 k 组的和为 $1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+2^{k-1})=(2^1-1)+(2^2-1)+\cdots+(2^k-1)=(2^1+2^2+\cdots+2^k)-k=2^{k+1}-k-2$，

设满足条件的的 N 在第 $k+1(k\in\mathbf{N}^*)$组($k\geqslant 44$)，且第 N 项为第 $k+1$ 组的第 $m(m\in\mathbf{N}^*)$个数，

第 $k+1$ 组的前 m 项和为 $1+2+2^2+\cdots+2^{m-1}=2^m-1$，

要使该数列的前 N 项和为 2 的整数幂，

即 2^m-1 与 $-k-2$ 互为相反数，

即 $2^m-1=2+k$，

所以 $k=2^m-3$，

由 $k\geqslant 44$，所以 $2^m-3\geqslant 44$，$m\geqslant 6$，取 $m=6$，此时 $k=2^6-3=61$，

对应满足的最小条件为 $N=\frac{61(61+1)}{2}+6=1897$.

四、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17.**【解析】**(1)因为 $a_1=2$，$a_{n+1}^2-2a_{n+1}=a_n^2+2a_n$

所以，$a_{n+1}^2-a_n^2=(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)=2(a_{n+1}+a_n)$，

因为数列$\{a_n\}$各项均为正数，即 $a_{n+1}+a_n>0$，

所以，$a_{n+1}-a_n=2$，即数列$\{a_n\}$为等差数列，公差为 $d=2$，首项为 $a_1=2$.

所以 $a_n=2+(n-1)\times 2=2n$. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $a_n=2n$，其公差为 $d=2$，所以，$b_n=(-1)^n a_n=(-1)^n\cdot 2n$

所以，$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{20}=(-a_1+a_2)+(-a_3+a_4)+\cdots+(-a_{19}+a_{20})=10d=20$. ………………… 10 分

18.**【解析】**(1)方法一：因为 $BC\perp$平面 PAB，$PE\subset$平面 PAB，所以 $BC\perp PE$.

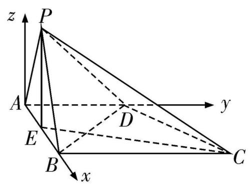
因为 $PE\perp EC$，$EC\cap BC=C$，$EC,BC\subset$平面 BCD，

所以 $PE\perp$平面 BCD，又 $BD\subset$平面 BCD，所以 $PE\perp BD$.

又因为 $\tan\angle ABD=\tan\angle BCE=\frac{1}{2}$，所以$\angle ABD=\angle BCE$，$\angle ABD+\angle CEB=90°$，即 $BD\perp CE$.

因为 $PE\cap CE=E$，$PE,CE\subset$平面 PEC，所以 $BD\perp$平面 PEC. ………………………………………… 6 分

方法二：依题意得 $AD\perp$平面 PAB，以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$方向为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.



设$\angle PAB=\theta$，$\theta\in(0,\pi)$，则 $B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,1,0)$，$E(1,0,0)$，$P(2\cos\theta,0,2\sin\theta)$，

$\overrightarrow{PE}=(1-2\cos\theta,0,-2\sin\theta)$，$\overrightarrow{CE}=(-1,-2,0)$.

因为 $PE\perp EC$，所以$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{CE}=2\cos\theta-1=0$，$\cos\theta=\frac{1}{2}$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

所以 $P(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PC}=(1,2,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PE}=(0,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PD}=(-1,1,-\sqrt{3})$.

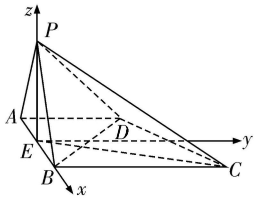
设平面 PEC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$.

由$\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{m}=0$，$\overrightarrow{PE}\cdot\boldsymbol{m}=0$，得$\begin{cases}x+2y-\sqrt{3}z=0,\\-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$令 $y=1$，则 $x=-2$，即 $\boldsymbol{m}=(-2,1,0)$.

由$\overrightarrow{BD}=(-2,1,0)=\boldsymbol{m}$，所以 $BD\perp$平面 PEC. ………………………………………………………… 6 分

(2)方法一：由(1)得 $PE\perp AB$，E 为 AB 的中点，所以 $PB=PA=AB=2$.

以 E 为坐标原点，EB，EP 所在直线分别为 x 轴，z 轴，过点 E 作 BC 的平行线为 y 轴，建立空间直角坐标系 $E-xyz$，



则 $P(0,0,\sqrt{3})$，$C(1,2,0)$，$D(-1,1,0)$，$B(1,0,0)$，

$\overrightarrow{PC}=(1,2,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PD}=(-1,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PE}=(0,0,-\sqrt{3})$.

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$.

由 $\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{m}=0$，$\overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{m}=0$ 得 $\begin{cases}x+2y-\sqrt{3}z=0,\\-x+y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=-2$，$z=-\sqrt{3}$，即 $\boldsymbol{m}=(1,-2,-\sqrt{3})$.

由(1)知平面 PCE 的一个法向量为 $\overrightarrow{BD}=(-2,1,0)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{BD}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\boldsymbol{m}|\,|\overrightarrow{BD}|}=\dfrac{-4}{\sqrt{8}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. …………………… 11 分

所以二面角 $E-PC-D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. …………………… 12 分

方法二：设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$.

由 $\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}=0$，得 $\begin{cases}a+2b-\sqrt{3}c=0,\\-a+b-\sqrt{3}c=0,\end{cases}$

令 $a=-1$，则 $b=2$，$c=\sqrt{3}$，即 $\boldsymbol{n}=(-1,2,\sqrt{3})$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\,|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. …………………… 11 分

所以二面角 $E-PC-D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. …………………… 12 分

19.【解析】(1)$\because MA\perp AQ$，$\therefore S_{四边形MAQB}=|MA|\cdot|QA|=|QA|=\sqrt{|MQ|^2-|MA|^2}=\sqrt{|MQ|^2-1}\geqslant\sqrt{|MO|^2-1}=\sqrt{3}$. $\therefore$ 四边形 $QAMB$ 面积的最小值为 $\sqrt{3}$. …………………… 6 分

(2)设 AB 与 MQ 交于 P，则 $MP\perp AB$，$MB\perp BQ$，$\therefore |MP|=\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\dfrac{1}{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle MBQ$ 中，$|MB|^2=|MP||MQ|$，即 $1=\dfrac{1}{3}|MQ|$，$\therefore |MQ|=3$，

设 $Q(x,0)$，则 $x^2+2^2=9$，$\therefore x=\pm\sqrt{5}$，$\therefore Q(\pm\sqrt{5},0)$. …………………… 12 分

20.【解析】(1)设抛物线焦点为 F，有 $|KA|+|AA'|=|KA|+|AF|\geqslant|KF|=\sqrt{2}$，

得 $\dfrac{p}{2}=1$，则抛物线的方程为 $y^2=4x$. …………………… 5 分

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$T(m,n)$，直线 AB 方程为 $x=t(y-1)$，

联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=t(y-1),\end{cases}$ 得 $y^2-4ty+4t=0$，$\Delta=(4t)^2-16t>0$，$y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=4t$，…………………… 7 分

且有 $\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=(x_1-m)(x_2-m)+(y_1-n)(y_2-n)$，

而 $\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=[ty_1-(m+t)][ty_2-(m+t)]+(y_1-n)(y_2-n)$

$=(t^2+1)y_1y_2-[t(m+t)+n](y_1+y_2)+(m+t)^2+n^2$

$=(t^2+1)(4t)-[t(m+t)+n](4t)+(m+t)^2+n^2$

$=(1-4m)t^2+2(2-2n+m)t+m^2+n^2$. …………………… 10 分

为满足题设，取 $\begin{cases}1-4m=0,\\2-2n+m=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}m=\dfrac{1}{4},\\n=\dfrac{9}{8},\end{cases}$

即存在定点 $T\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{9}{8}\right)$，使得 $\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}$ 为定值 $\dfrac{85}{64}$. …………………… 12 分

21.【解析】(1)由 $a_1=2$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ 知 $a_{n+1}-1=\dfrac{a_n-1}{a_n}$，$\therefore \dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{a_n}{a_n-1}=1+\dfrac{1}{a_n-1}$

故 $\dfrac{1}{a_{n+1}-1}-\dfrac{1}{a_n-1}=1$，$\therefore$ 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n-1}\right\}$ 是以 1 为公差，1 为首项的等差数列，…………………… 4 分

$\therefore \dfrac{1}{a_n-1}=n$，即 $a_n=\dfrac{n+1}{n}$. …………………… 6 分

(2)由 $\dfrac{b_{2n}}{b_{2n-1}}=\dfrac{b_{2n+1}}{b_{2n}}=a_n$，有 $\dfrac{b_{2n+1}}{b_{2n-1}}=a_n^2=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2$，

$\therefore b_{2n+1}=\frac{b_{2n+1}}{b_{2n-1}}\cdot\frac{b_{2n-1}}{b_{2n-3}}\cdot\frac{b_3}{b_1}\cdot b_1=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^2\cdot\cdots\left(\frac{2}{1}\right)^2\cdot 1=(n+1)^2$，……………………………… 9 分

(3)由(2)$b_{2n}=\frac{b_{2n+1}}{a_n}=n(n+1)$. ……………………………… 11 分

$\therefore\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_4}+\cdots+\frac{1}{b_{2n}}=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}<1$. ……………… 12 分

22.【解析】(1)由条件 $c=1$，设 $A(x_0,y_0)$，则 C：$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，又 $B_1(0,b)$，$B_2(0,-b)$，

$\because k_{AB_1}\cdot k_{AB_2}=\frac{y_0-b}{x_0}\cdot\frac{y_0+b}{x_0}=\frac{y_0^2-b^2}{x_0^2}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{3}{4}$，

$\therefore a^2=\frac{4}{3}b^2=\frac{4}{3}(a^2-1)$，$\therefore a=2,b=\sqrt{3}$.

即椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………… 5 分

(2)由对称性可知，四边形 $PQNM$ 为平行四边形，

设 MN：$x=my+1$，与椭圆方程联立得：$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$. ……………………………… 7 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$. ……………………………… 8 分

$|MN|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{\frac{36m^2}{(3m^2+4)^2}+\frac{36}{3m^2+4}}=\frac{12(1+m^2)}{3m^2+4}$. ……………………………… 9 分

设点 $F_2(1,0)$到直线 l_1 的距离为 d，则 $d=\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}$，所以四边形 $PQNM$ 面积为：

$S=|MN|d=\frac{24\sqrt{1+m^2}}{3m^2+4}$. ……………………………… 10 分

设 $\sqrt{m^2+1}=t\geqslant1$，则 $S=\frac{24t}{3t^2+1}=\frac{24}{3t+\frac{1}{t}}$在 $t\in[1,+\infty)$单调递减，

所以 S 的取值范围为$(0,6]$. ……………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。