普通高中2024届高三跨市联合适应性训练检测卷

数学参考答案　　2023.11

1.B　$2i(3-i)=6i-2i^2=2+6i$ 的共轭复数为 $2-6i$.

2.C　因为 $B=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$，$A\cap B\neq\varnothing$，所以 $1\in A$ 或 $2\in A$. 若 $2a-1=1$，则 $a=1$，A 不满足集合的互异性. 若 $2a-1=2$，则 $a=\frac{3}{2}$，$A=\{2,\frac{3}{2},3\}$，符合题意. 若 $a=2$，则 $2a-1=3$，A 不满足集合的互异性.

3.A　因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=2^0+m=0$，解得 $m=-1$，则 $f(-3)=-f(3)=-10$.

4.C　$|AB|=y_1+\frac{p}{2}+y_2+\frac{p}{2}=y_1+y_2+p=12+\frac{8}{2}=16$.

5.D　由 $y=e^{f'(x)}$ 的图象知，当 $x\in(-\infty,a)$ 时，$e^{f'(x)}<1$，则 $f'(x)<0$，当 $x\in(a,d)$ 时，$e^{f'(x)}\geqslant 1$，则 $f'(x)>0$，当 $x\in(d,+\infty)$ 时，$e^{f'(x)}<1$，则 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 的单调递增区间为 (a,d)，单调递减区间为 $(-\infty,a)$ 和 $(d,+\infty)$，故 $f(x)$ 的极大值点为 d.

6.D　因为 $AB\perp BC$，$AB=1$，$BC=\sqrt{15}$，所以 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4$. 又 $AD=CD=2\sqrt{2}$，所以 $AD^2+CD^2=AC^2$，故 $AD\perp CD$. 取 AC 的中点 O，则 O 到四面体 $ABCD$ 四个顶点的距离均为2，即四面体 $ABCD$ 外接球的半径为2，则四面体 $ABCD$ 外接球的体积为 $\frac{4\pi}{3}\times 2^3=\frac{32\pi}{3}$.

7.B　因为经过10 h过滤后减少了20%的污染物，所以 $P_0e^{-10k}=80\%P_0$，解得 $k=-\frac{\ln 0.8}{10}$.

当 $P(t)=10\%P_0$ 时，$10\%P_0=P_0e^{\frac{\ln 0.8}{10}t}$，解得 $t=-\frac{10\ln 10}{\ln 0.8}=\frac{-10-10\log_2 5}{2-\log_2 5}\approx 103$. 故还需要大约93 h.

8.A　因为 $e^{2a}+2\ln b+1=b^2+2a$，所以 $e^{2a}-2a=b^2-2\ln b-1=e^{\ln b^2}-\ln b^2-1$，

所以 $e^{\ln b^2}-\ln b^2-1>e^{2a}-2a-1$. 令 $f(x)=e^x-x-1$，则 $f'(x)=e^x-1$，可知 $f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $a>0$，$b>1$，所以 $2a>0$，$\ln b^2>0$，则 $\ln b^2>2a$，所以 $\ln b>a$，即 $b>e^a$.

9.BC　由题可知 $\begin{cases}2^2+4^2-4m>0,\\1^2+2+m>0,\end{cases}$ 解得 $-3<m<5$，故选BC.

10.ABD　由图可知，$10\times(0.006+0.012+0.02+0.032+0.02+m)=1$，解得 $m=0.01$，则成绩在 $[90,100)$ 的频率为0.1，由 $0.1n=10$，得 $n=100$，A，B正确. 问卷调查成绩的平均数为 $45\times 0.06+55\times 0.12+65\times 0.2+75\times 0.32+85\times 0.2+95\times 0.1=72.8$，C不正确. 因为 $0.06+0.12+0.2+0.32=0.7<0.8$，$0.06+0.12+0.2+0.32+0.2=0.9>0.8$，所以问调查成绩的80%分位数在 $[80,90)$ 内，设问卷调查成绩的80%分位数为 x，则 0.7 $0.02(x-80)=0.8$，解得 $x=85$，D正确.

11. BC　因为$\{a_n\}$是"平方递推数列"，所以$a_{n+1}=a_n^2$. 又$a_1>0$，所以$a_n>0$，则$\lg a_{n+1}-\lg a_n=\lg\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lg a_n$，所以$\{\lg a_n\}$不是等差数列，A不正确. 因为$\dfrac{\lg a_{n+1}}{\lg a_n}=\dfrac{\lg a_n^2}{\lg a_n}=2$，所以$\{\lg a_n\}$是等比数列，B正确. 因为$a_{n+2}a_{n+1}=a_{n+1}^2a_n^2=(a_{n+1}a_n)^2$，所以$\{a_na_{n+1}\}$是"平方递推数列"，C正确. 因为$a_{n+2}+a_{n+1}=a_{n+1}^2+a_n^2\neq(a_{n+1}+a_n)^2$，所以$\{a_{n+1}+a_n\}$不是"平方递推数列"，D不正确.

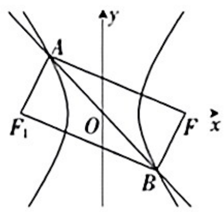
12. BD　设正四棱台①的上底面边长为a cm，下底面边长为b cm，高为h cm，则$\tan\alpha_1=\dfrac{\sqrt{2}h}{b-a}$，$\tan\theta_1=\dfrac{2h}{b-a}$. 因为从左往右，上底面边长、下底面边长、高均依次递增d cm，所以$\tan\alpha_2=\dfrac{\sqrt{2}(h+d)}{b-a}$，$\tan\theta_2=\dfrac{2(h+d)}{b-a}$，$\tan\alpha_3=\dfrac{\sqrt{2}(h+2d)}{b-a}$，$\tan\theta_3=\dfrac{2(h+2d)}{b-a}$，则$\tan\alpha_1+\tan\alpha_3=2\tan\alpha_2$，$\tan\theta_1+\tan\theta_3=2\tan\theta_2$.

13. -11　因为$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，所以$3(x+3)+4\times(2+4)=0$，解得$x=-11$.

14. 72　由题可知，同一家人座位相邻的不同坐法种数为$2A_3^3A_3^3=72$.

15. $[\dfrac{11}{6},\dfrac{19}{6})$　由$f(x)=0$，得$\sin\omega x=-\dfrac{1}{2}$，由$0\leqslant x\leqslant\pi$，得$0\leqslant\omega x\leqslant\omega\pi$. 因为$f(x)$在$[0,\pi]$上有且仅有2个零点，所以$\dfrac{11\pi}{6}\leqslant\omega\pi<\dfrac{19\pi}{6}$，解得$\dfrac{11}{6}\leqslant\omega<\dfrac{19}{6}$.

16. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　如图，记C的左焦点为F_1，根据对称性可知四边形$AFBF_1$为平行四边形. 因为$|AB|=2|OF|$，所以$|AB|=|FF_1|$，所以四边形$AFBF_1$为矩形. 设$\angle AFF_1=\theta$，则$\angle AOF_1=2\theta$，$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{3}{4}$，解得$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$或$\tan\theta=-3$（舍去），所以$\dfrac{|AF_1|}{|AF|}=\dfrac{1}{3}$. 由$|AF|-|AF_1|=2a$，得$|AF|=3a$，$|AF_1|=a$，则$|FF_1|=2c=\sqrt{10}a$，则$C$的离心率为$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.



17. 解：(1)因为$c\cos A-a\cos B+c=0$，所以$\sin C\cos A-\sin A\cos B+\sin C=0$. ……… 1分

又$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，所以$\sin C\cos A+\cos A\sin B=\cos A(\sin B+\sin C)=0$. ……… 3分

因为$\sin B+\sin C\neq0$，所以$\cos A=0$. 又$A\in(0,\pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{2}$， ……… 4分

故$\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=\sin^2B+\sin^2(\dfrac{\pi}{2}-B)-1=\sin^2B+\cos^2B-1=0$. ……… 5分

(2)因为$A=\dfrac{\pi}{2}$，所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\leqslant\dfrac{b^2+c^2}{4}$，当且仅当$b=c$时，等号成立. ……… 8

又$b^2+c^2=a^2=25$，所以$\triangle ABC$面积的最大值为$\dfrac{25}{4}$. ……… 10分

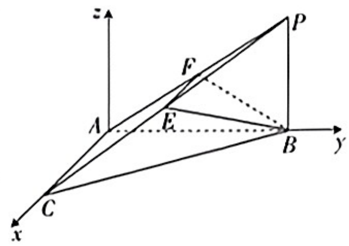
18.(1)证明：因为 $PB\perp$ 平面 ABC，$AC\subset$ 平面 ABC，所以 $PB\perp AC$. …………………………………… 1 分

又 $AB\perp AC$，$PB\cap AB=B$，所以 $AC\perp$ 平面 PAB. …………………………………………… 2 分

因为 E，F 分别为 PC，PA 的中点，所以 $EF/\!/AC$，则 $EF\perp$ 平面 PAB. ……………………… 4 分

因为 $EF\subset$ 平面 BEF，所以平面 $BEF\perp$ 平面 PAB. ……………………………………………… 5 分

(2)解：以 A 为坐标原点，AC，AB 所在直线分别为 x 轴，y 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



由 $AB\perp AC$，$AB=3\sqrt{3}$，$BC=6$，得 $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=3$，…………………………………………………………… 6 分

则 $B(0,3\sqrt{3},0)$，$P(0,3\sqrt{3},2\sqrt{3})$，$E(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},\sqrt{3})$，$F(0,\frac{3\sqrt{3}}{2},\sqrt{3})$，…………………………………………………………………………………… 7 分

$\overrightarrow{BE}=(\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2},\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EF}=(-\frac{3}{2},0,0)$，$\overrightarrow{BP}=(0,0,2\sqrt{3})$. ………………………… 8 分

设平面 BEF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{3}{2}x_1-\frac{3\sqrt{3}}{2}y_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ -\frac{3}{2}x_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=2$，得 $\boldsymbol{m}=(0,2,3)$. ……………… 9 分

设平面 PBE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(\qquad)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{3}{2}x_2-\frac{3\sqrt{3}}{2}y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ 2\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$ 令 $y_2=1$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,0)$. …………… 10 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{2\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$，即平面 BEF 与平面 PEB 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$. ……………………………………………………………………………………………… 12 分

19.解：(1)当 $n=1$ 时，由 $S_1+4=2a_1$，得 $a_1=4$. …………………………………………………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时，因为 $S_n+4=2a_n$，所以 $S_{n-1}+4=2a_{n-1}$，……………………………………… 2 分

则 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}$. ……………………………………………………………… 3 分

故 $\{a_n\}$ 是以 4 为首项，2 为公比的等比数列. ………………………………………………………… 4 分

从而 $a_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$. ………………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)可知 $\frac{n+2}{n(n+1)a_{n+1}}=\frac{n+2}{n(n+1)2^{n+2}}=\frac{1}{n\cdot 2^{n+1}}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+2}}$，…………………… 9 分

则 $T_n=\frac{1}{1\times 2^2}-\frac{1}{2\times 2^3}+\frac{1}{2\times 2^3}-\frac{1}{2\times 2^4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 2^{n+1}}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+2}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+2}}$. ……………………………………………………………………………………………… 12 分

20.解：(1)由题可知，甲、乙两人兑换同一种商品的概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{13}{36}$. ………………………………………………………………………………………………… 4 分

(2)由题可知，兑换 A,B,C 三种商品所需的积分分别为 800，900，1000，则 X 的取值可能为 0，100，200，300，400， ………………………………………………………… 5分

且 $P(X=0)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$，$P(X=100)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{36}$，

$P(X=200)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{36}$，$P(X=300)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

$P(X=400)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$， ………………………………………………………… 9分

则 X 的分布列为

X	0	100	200	300	400
P	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

………………………………………………………… 10分

$EX=0\times\frac{1}{18}+100\times\frac{5}{36}+200\times\frac{11}{36}+300\times\frac{1}{4}+400\times\frac{1}{4}=250$. ………………………… 12分

21. 解：(1)由题可知 $\begin{cases}a^2=b^2+c^2,\\ \frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}=\frac{17}{4}(a>b>0),\\ 2c=2\sqrt{3},\end{cases}$ ………………………………………… 2分

解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1,\end{cases}$ ………………………………………………………… 3分

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………………………… 4分

(2)设 l 的方程为 $y=k(x-4)(k<0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

联立方程组 $\begin{cases}y=k(x-4),\\ x^2+4y^2-4=0,\end{cases}$ 整理得 $(1+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-4=0$， ……………… 5分

则 $\Delta=(-32k^2)^2-4(1+4k^2)(64k^2-4)=16-192k^2>0$，得 $k^2<\frac{1}{12}$， ……………… 6分

$x_1+x_2=\frac{32k^2}{1+4k^2}$. ………………………………………………………… 7分

设 $G(x_0,y_0)$，因为 $A(0,-1)$，所以 $x_0=\frac{x_1+x_2}{3}$，$y_0=\frac{y_1+y_2-1}{3}$， ………………………… 8分

所以 $k_{OG}=\frac{y_1+y_2-1}{x_1+x_2}=\frac{k(x_1+x_2)-8k-1}{x_1+x_2}=k-\frac{8k+1}{\frac{32k^2}{1+4k^2}}=-\frac{1}{32}(\frac{1}{k^2}+\frac{8}{k}+4)$ ………… 10分

$=-\frac{1}{32}(\frac{1}{k}+4)^2+\frac{3}{8}$，当 $\frac{1}{k}=-4$，即 $k=-\frac{1}{4}$（满足 $k^2<\frac{1}{12}$）时，k_{OG} 取得最大值，且最大值为 $\frac{3}{8}$. ………………………………………………………… 12分

22. 解:(1)因为 $f(x)=e^x+ax^2$,所以 $f'(x)=e^x+2ax$. …………………………………… 1分

由 $f(1)=e+a$,$f'(1)=e+2a$,得曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(e+a)=(e+2a)(x-1)$. …………………………………… 3分

因为该切线经过坐标原点,所以 $0-(e+a)=(e+2a)\times(0-1)$,解得 $a=0$. ………… 4分

(2)令 $g(x)=f(x)-x-1=e^x+ax^2-x-1$,则 $g'(x)=e^x+2ax-1$. 令 $h(x)=e^x+2ax-1$,则 $h'(x)=e^x+2a$. …………………………………… 5分

若 $a\geqslant0$,则 $h'(x)>0$ 恒成立,$h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $h(0)=0$,所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$g'(x)=h(x)<0$,$g(x)$ 单调递减,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$g'(x)=h(x)>0$,$g(x)$ 单调递增,则 $g(x)_{\min}=g(0)=0$,即方程 $f(x)=x+1$ 有且仅有1个实数根,不符合题意. …………………………………… 6分

若 $a<0$,则由 $h'(x)=0$,解得 $x=\ln(-2a)$,当 $x\in(-\infty,\ln(-2a))$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减,当 $x\in(\ln(-2a),+\infty)$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增,则 $h(x)_{\min}=h(\ln(-2a))=-2a+2a\ln(-2a)-1$. …………………………………… 7分

令 $\varphi(x)=-2x+2x\ln(-2x)-1$,$x<0$,则 $\varphi'(x)=-2+2\ln(-2x)+2=2\ln(-2x)$,当 $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})$ 时,$\varphi'(x)>0$,$\varphi(x)$ 单调递增,当 $x\in(-\frac{1}{2},0)$ 时,$\varphi'(x)<0$,$\varphi(x)$ 单调递减,则 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(-\frac{1}{2})=0$. …………………………………… 8分

若 $a=-\frac{1}{2}$,则 $g'(x)=h(x)\geqslant0$ 恒成立,则 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增,$g(x)$ 不可能有两个零点,即方程 $f(x)=x+1$ 不可能有2个不同的实数根,不符合题意. ………… 9分

若 $a<-\frac{1}{2}$,则 $\ln(-2a)>0$,$h(\ln(-2a))<0$,显然当 $x\to+\infty$ 时,$h(x)\to+\infty$,故 $\exists x_0\in(\ln(-2a),+\infty)$,$h(x_0)=0$. 又 $h(0)=0$,所以当 $x\in(-\infty,0)$ 和 $(x_0,+\infty)$ 时,$g'(x)=h(x)>0$,$g(x)$ 单调递增,当 $x\in(0,x_0)$ 时,$g'(x)=h(x)<0$,$g(x)$ 单调递减. 因为 $g(0)=0$,当 $x\to+\infty$ 时,$g(x)\to+\infty$,所以 $\exists x_1\in(x_0,+\infty)$,$g(x_1)=0$,则 $g(x)$ 恰有2个零点,即方程 $f(x)=x+1$ 恰有2个不同的实数根,符合题意. …………………………………… 10分

若 $-\frac{1}{2}<a<0$,则 $\ln(-2a)<0$,$h(\ln(-2a))<0$,显然当 $x\to-\infty$ 时,$h(x)\to+\infty$,故 $\exists x_2\in(-\infty,\ln(-2a))$,$h(x_2)=0$. 又 $h(0)=0$,所以当 $x\in(-\infty,x_2)$ 和 $(0,+\infty)$ 时,$g'(x)=h(x)>0$,$g(x)$ 单调递增,当 $x\in(x_2,0)$ 时,$g'(x)=h(x)<0$,$g(x)$ 单调递减. 因为 $g(0)=0$,当 $x\to-\infty$ 时,$g(x)\to-\infty$,所以 $\exists x_3\in(-\infty,x_2)$,$g(x_3)=0$,则 $g(x)$ 恰有2个零点,即方程 $f(x)=x+1$ 恰有2个不同的实数根,符合题意. …………………………………… 11分

综上所述,a 的取值范围为 $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},0)$. …………………………………… 12分