

高 2021 级高三上期第四次月考考试

数学（文科）试题

时间：120 分钟 总分：150 分

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、班级、考号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，将答案书写在答题卡相应位置上，写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | 2^x > 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | \log_2 x < 3\}$, 则 $(C_R A) \cap B =$ ()

A. $(0, 2)$ B. $(0, 2]$ C. $\{1, 2\}$ D. $(1, 2]$

2. 若 i 是虚数单位，则复数 $\frac{2+3i}{1+i}$ 的虚部为 ()

A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{5}{2}i$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}i$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_7 + a_9 = 16$, $a_4 = 1$, 则 a_{12} 等于 ()

A. 15 B. 30 C. 31 D. 64

4. 在 $\triangle ABC$ 中，“ $A > \frac{\pi}{6}$ ”是“ $\sin A > \frac{1}{2}$ ”的 ()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) =$ ()

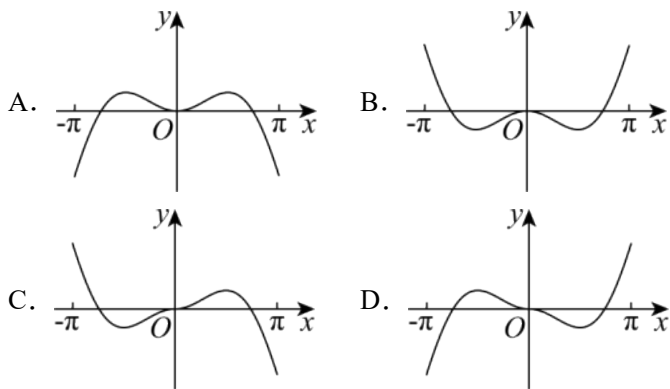
A. -2 B. -1 C. 0 D. 2

6. 已知角 α 的顶点是坐标原点，始边是 x 轴的正半轴，终边是射线 $y = 2x (x \geq 0)$, 则

$\tan\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ ()

A. $\frac{1}{7}$ B. $-\frac{1}{7}$ C. -7 D. $-\frac{1}{3}$

7. 函数 $f(x) = \cos x + x \sin x - 1$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的图象大致为 ()



8. 函数 $f(x) = |(\frac{1}{2})^x - 1| - \log_2 x$ 的零点个数为 ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

9. 中国古典十大名曲是指《高山流水》、《梅花三弄》、《夕阳箫鼓》、《汉宫秋月》、《阳春白雪》、《渔樵问答》、《胡笳十八拍》、《广陵散》、《平沙落雁》、《十面埋伏》。如图，以时间为横轴、音高为纵轴建立平面直角坐标系，那么写在五线谱中的音符就变成了坐标系中的点，如果这些点在函数

$y = 4\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象上，且图象过点 $(\frac{\pi}{24}, 2)$ ，相邻最大值与最小值之间的水平距离为 $\frac{\pi}{2}$ ，则是函数的单调递增区间的是 ()



- A. $[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}]$ B. $[\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}]$
 C. $[\frac{5\pi}{24}, \frac{3\pi}{8}]$ D. $[-\frac{7\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}]$

10. 已知定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x-1) = -4 - f(-1-x)$ ，且与曲线

$y = \frac{1-2x}{x+1}$ 交于点 $A(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$ ，则 $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)$ 为 ()

- A. -16 B. -12 C. -9 D. -6

11. 若对任意的 $x_1, x_2 \in (m, +\infty)$ ，且 $x_1 < x_2$ ， $\frac{x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1}{x_1 - x_2} > 1$ ，则 m 的取值范围是 ()

- A. $[e^2, +\infty)$ B. $[e, +\infty)$ C. $[\frac{1}{e}, +\infty)$ D. $[\frac{1}{e}, e)$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 e^x, & x < 1 \\ e^x, & x \geq 1 \end{cases}$, 方程 $[f(x)]^2 - 2af(x) = 0 (a \in \mathbb{R})$ 有两个不等实根, 则下列选项

正确的是 ()

A. 点 $(0,0)$ 是函数 $f(x)$ 的零点

B. a 的取值范围是 $(\frac{2}{e^2}, \frac{e^2}{8}) \cup [\frac{e}{2}, +\infty)$

C. $x = -3$ 是 $f(x)$ 的极大值点

D. $\exists x_1 \in (0,1), x_2 \in (1,3)$, 使 $f(x_1) > f(x_2)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (2x-1)^2 + 1, & x \geq 2 \\ 2^{x-1}, & x < 2 \end{cases}$, 则 $f(\log_2 \frac{1}{4}) =$ _____.

14. 设命题 $p: \forall x \in [\sqrt{2}, 2], x + \frac{2}{x} \geq a$, 若 $\neg p$ 是假命题, 则实数 a 的取值范围是 _____.

15. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$ 的周期为 π , 图象的一个对称中心为 $(\frac{\pi}{4}, 0)$,

将函数 $f(x)$ 图象上的所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍 (纵坐标不变), 再将所得图象向

右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 则函数 $g(x)$ 的解析式为 _____.

16. 已知函数 $f(x) = m\sqrt{\ln x - \frac{1}{4}} + 2x + \frac{1}{2}n$ 在区间 $[3, 5]$ 上有零点, 则 $z = m^2 + n^2$ 的最小值

为 _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

17. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 9$.

(1) 若 $a = -1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减, 求实数 a 的取值范围.

18. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 2, b_2 = 2b_1$, 当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, 等式 $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$ 恒成立.

(1) 求 $\{b_n\}$ 的通项公式;

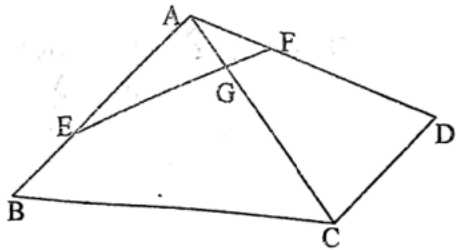
(2) 若 $c_n = \frac{n}{b_n} + 1$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

19. 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a = 4$,

$$\frac{a \cos C + c \cos A}{\cos C} + \sqrt{2}b = 0,$$

(1) 求角C的值;

(2) 若 $bc \cdot \sin(A + \frac{\pi}{2}) = -b^2 - ac \cdot \cos(B + \pi)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.



20. 某公司拟扩建公司办公区域, 扩建区域平面示意

图大致为为四边形 $ABCD$ (如图所示)。为了学习和生活的方便, 现需要在线段 AB 和线段 AD 上分别选一处位置, 分别记为点 E 和点 F , 修建一条贯穿两块区域的直线道路 EF , 线段 EF 与线段 AC 交于点 G , EG 段和 GF 段修建道路每千米的费用分别为 10 万元和 20 万元, 已知线段 AG 长 2 千米, 线段 AB 和线段 AD 长均为 6 千米, $AB \perp AC$, $\angle CAD = \frac{\pi}{6}$, 设 $\angle AEG = \theta$.

(1) 求修建道路的总费用 Y (单位: 万元) 与 θ 的关系式 (不用求 θ 的范围);

(2) 求修建道路的总费用 Y 的最小值.

21. 已知函数 $f(x) = e^{ax} - ax (a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $a(\ln b - \ln a + a) \geq be^{a-1}$, 求 $\frac{1}{a+b} \cdot (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$ 的最小值.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. 在平面直角坐标系中, 以原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 两种坐标系取相同的单位长度, 已知曲线 $C: \rho \sin^2 \theta = 2a \cos \theta (a > 0)$, 过点 $P(-2, -4)$ 的直线 l 的参数

方程为：
$$\begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = -4 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$

(1) 求曲线C的普通坐标方程和直线l的极坐标方程；

(2) 直线l与曲线C分别交于M、N两点.若 $|PM|$ 、 $|MN|$ 、 $|PN|$ 成等比数列,求a的值。

23. 已知函数 $f(x) = |4x+a| - |4x+a^2|$.

(1) 若 $a=2$, 求不等式 $f(x) + \frac{1}{2}x < 1$ 的解集;

(2) 若 $\exists x \in \mathbb{R}$, $\exists a \in [0,2]$, 使得 $f\left(\frac{1}{2}x\right) > m$ 能成立, 求实数m的取值范围.

