月考五数学（文科）答案

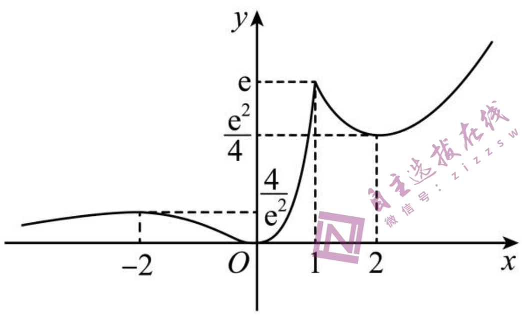
一．选择题：CCABC　BADDB　AD

二．填空题：13.$\frac{1}{8}$　14.$(-\infty,2\sqrt{2}\ ]$　15.$g(x)=\cos x$　16.$\frac{36}{\ln 3}$

12.【详解】当$x<1$时，$f(x)=x^2e^x$，则$f'(x)=(x^2+2x)e^x=x(x+2)e^x$，

当$x\in(-\infty,-2),(0,1)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当$x\in(-2,0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，且$f(-2)=\frac{4}{e^2},f(0)=0$；当$x\ge1$时，$f(x)=\frac{e^x}{x^2}$，则$f'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$，

当$x\in(1,2)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当$x\in(2,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，且$f(1)=e,f(2)=\frac{e^2}{4}$，且$f(x)\ge0$恒成立，画出函数图象如下：



对 A，由函数图象可得 0 是函数$f(x)$的零点，故 A 错误；对 B,方程$[f(x)]^2-2af(x)=0(a\in R)$等价于$f(x)=0$或$f(x)=2a$，由图可得$f(x)=0$有 1 个实数根$x=0$，所以方程$[f(x)]^2-2af(x)=0(a\in R)$有两个不等实根等价于$f(x)=2a$有 1 个非零实根，则由图可得$\frac{4}{e^2}<2a<\frac{e^2}{4}$或$2a>e$，故 B 错误.对 C，由图可得$x=-2$是$f(x)$的极大值点，故 C 错误；

对 D，由图可得$f(x_1)\in(0,\mathrm{e}),f(x^2)\in\left[\frac{\mathrm{e}^2}{4},\mathrm{e}\right)$，故$\exists x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,3)$，使$f(x_1)>f(x_2)$，故 D 正确；

17.（1）$a=-1$时，$f(x)=x^3-x^2+3x-9$，$f'(x)=3x^2-2x+3$，

$f'(2)=11$，$f(2)=1$，故切线方程是：$y-1=11(x-2)$，即$11x-y-21=0$；

（2）若函数$f(x)$在区间$[1,2]$上单调递减，

则 $f'(x)=3x^2+2ax+3\le 0$ 在 $[1,2]$ 恒成立，即 $a\le -\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 在 $[1,2]$ 恒成立，

令 $h(x)=-\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$，$x\in[1,2]$，$h'(x)=-\frac{3(x-1)(x+1)}{2x^2}<0$ 在 $[1,2]$ 恒成立，

$\therefore h(x)$ 在 $[1,2]$ 递减，$h(x)_{\min}=h(2)=-\frac{15}{4}$，$\therefore a\le -\frac{15}{4}$.

18.（1）由题可知数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列.

故 $b_n=2^n$

（2）由（1）可得，$b_n=2^n$，所以 $c_n=\frac{n}{2^n}+1$，

设 $d_n=\frac{n}{2^n}$，设其前 n 项和为 S_n，

则 $S_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$，①

$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$，②

减②得

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}},$$

所以 $S_n=2-\frac{n+2}{2^n}$，

所以 $T_n=2-\frac{n+2}{2^n}+n$.

19.【详解】（1）因为 $\frac{a\cos C+c\cos A}{\cos C}+\sqrt{2}b=0$，故 $a\cos C+c\cos A+\sqrt{2}b\cos C=0$，

则 $\sin A\cos C+\sin C\cos A+\sqrt{2}\sin B\cos C=0$，

故 $\sin(A+C)+\sqrt{2}\sin B\cos C=0$，因为 $A+C=\pi-B$，则 $\sin(A+C)=\sin B\ne 0$，

则 $1+\sqrt{2}\cos C=0$，故 $\cos C=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $C=\frac{3\pi}{4}$；

（2）$ac\cos B-bc\cos A=b^2$，则 $ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b^2$，

化简得 $a^2=2b^2$，则 $b=2\sqrt{2}$，故 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4$.

20.【详解】（1）在 $\mathrm{Rt}\triangle AEG$ 中，因为 $\sin\angle AEG=\frac{AG}{EG}$，可得 $EG=\frac{AG}{\sin\angle AEG}=\frac{2}{\sin\theta}$，

在 $\triangle AFG$ 中，可知 $\angle AFG=\frac{\pi}{3}-\theta$，

由正弦定理$\dfrac{GF}{\sin\angle GAF}=\dfrac{AG}{\sin\angle AFG}$，可得$GF=\dfrac{AG\cdot\sin\angle GAF}{\sin\angle AFG}=\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}$，

所以$y=10EG+20GF=\dfrac{20}{\sin\theta}+\dfrac{20}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}$.

（2）由（1）可知：$y=\dfrac{20}{\sin\theta}+\dfrac{20}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}=\dfrac{20}{\sin\theta}+\dfrac{40}{\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta}=\dfrac{20\sin\theta+20\sqrt{3}\cos\theta}{\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta}$

$=\dfrac{80\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)}{-2\cos\left(2\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)-1}=\dfrac{80\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)}{4\sin^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)-3}$，因为$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$，则$\theta+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$，

令$t=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，则$y=\dfrac{80t}{4t^2-3}=\dfrac{80}{4t-\dfrac{3}{t}}$，且$y=4t,y=-\dfrac{3}{t}$在$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$上单调递增，

可知$y=4t-\dfrac{3}{t}$在$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$上单调递增，所以$y=\dfrac{80t}{4t^2-3}=\dfrac{80}{4t-\dfrac{3}{t}}$在$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$上单调递减，

当$t=1$，即$\theta=\dfrac{\pi}{6}$时，修建道路的总费用y取到最小值80万元.

21.【详解】（1）因为$f(x)=e^{ax}-ax(a\in R,a\neq 0)$定义域为R，则$f(x)=ae^{ax}-a=a(e^{ax}-1)$，

当$a>0$时，令$f'(x)<0$，解得$x<0$，令$f'(x)>0$，解得$x>0$，

所以$f(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递减，在区间$(0,+\infty)$上单调递增；

当$a<0$时，令$f'(x)<0$，解得$x<0$，令$f'(x)>0$，解得$x>0$；

所以$f(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递减，在区间$(0,+\infty)$上单调递增，

综上，$f(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递减，在区间$(0,+\infty)$上单调递增.

（2）因为$a(\ln b-\ln a+a)\geq be^{a-1}$，所以$\ln b-\ln a+a\geq\dfrac{b}{a}e^{a-1}$，

所以$\ln\dfrac{b}{a}+\ln e^{a-1}+1\geq\dfrac{b}{a}e^{a-1}$，即$\ln(\dfrac{b}{a}e^{a-1})-\dfrac{b}{a}e^{a-1}+1\geq 0$

令$t=\dfrac{b}{a}e^{a-1}$，则有$\ln t-t+1\geq 0\,(t>0)$，

设$f(t)=\ln t-t+1$，则$f'(t)=\dfrac{1}{t}-1$，由$f'(t)=0$得$t=1$

当$0<t<1$时，$f'(t)>0$，$f(t)$单调递增，当$t>1$时，$f'(t)<0$，$f(t)$单调递减，

所以$f(t)_{\max}=f(1)=0$，即$\ln t-t+1\leq 0$，又因为$\ln t-t+1\geq 0$，

所以$\ln t-t+1=0$，当且仅当$t=1$时等号成立

所以$t=\frac{b}{a}\mathrm{e}^{a-1}=1$，从而$\frac{1}{b}=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{a-1}$，所以原式$=\frac{1}{ab}=\frac{\mathrm{e}^{a-1}}{a^2}(a>0)$

设$g(x)=\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{x^2}(x>0)$，则$g'(x)=\frac{(x-2)\mathrm{e}^{x-1}}{x^3}$，由$g'(x)=0$得$x=2$

当$0<x<2$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，当$x>2$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

所以$g(x)_{\min}=g(2)=\frac{\mathrm{e}^{2-1}}{2^2}=\frac{\mathrm{e}}{4}$，所以最小值为$\frac{\mathrm{e}}{4}$.

22.【详解】(1) 因为曲线C：$\rho\sin^2\theta=2a\cos\theta(a>0)$

所以曲线C的直角坐标方程为$y^2=2ax(a>0)$

直线的直角坐标方程为：x-y-2=0

所以极坐标方程为：$\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-2=0$即$\rho\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$

(2) 将直线l的参数方程$\begin{cases}x=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\y=-4+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$代入曲线$C$的直角坐标方程得：

$\frac{1}{2}t^2-\left(4\sqrt{2}+\sqrt{2}a\right)t+16+4a=0$，

设交点M、N对应的参数分别为t_1、t_2，

则$t_1+t_2=2\left(4\sqrt{2}+\sqrt{2}a\right)$，$t_1t_2=2(16+4a)$，

因为$|PM|$、$|MN|$、$|PN|$成等比数列，所以$|t_1-t_2|^2=|t_1t_2|$，

即$|t_1+t_2|^2=5|t_1t_2|$，$4\left(4\sqrt{2}+\sqrt{2}a\right)^2=10(16+4a)$，

解得$a=1$或$a=-4$（舍取），故满足条件的$a=1$，

23.【详解】(1) 依题意，得$|4x+2|-|4x+4|+\frac{1}{2}x<1$，

当$x\le-1$时，$-4x-2+4x+4+\frac{1}{2}x<1$，可得$x<-2$；

当$-1<x<-\frac{1}{2}$时，$-4x-2-4x-4+\frac{1}{2}x<1$，可得$-\frac{14}{15}<x<-\frac{1}{2}$；

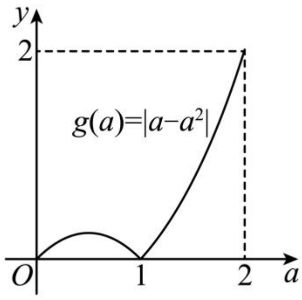
当$x\ge-\frac{1}{2}$时，$4x+2-4x-4+\frac{1}{2}x<1$，可得$-\frac{1}{2}\le x<6$；

综上，不等式$f(x)+\frac{1}{2}x<1$的解集为$\{x\mid x<-2$或$-\frac{14}{15}<x<6\}$.

（2）依题意，$f\left(\frac{1}{2}x\right)>m \Leftrightarrow |2x+a|-|2x+a^2|>m$，

又$|2x+a|-|2x+a^2|\le|2x+a-2x-a^2|=|a-a^2|$，故$|a-a^2|>m$，

令$g(a)=|a-a^2|$，$a\in[0,2]$，



结合$g(a)$的图象知，$[g(a)]_{\max}=g(2)=2$，故$m<2$，

∴m的取值范围为$(-\infty,2)$．