# 开封市 2024 届高三年级第一次模拟考试
# 数学参考答案

**注意事项：**答案仅供参考，其他合理答案也可酌情给分。

**一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | D | A | C | B | B | A | B | D |

**二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。**

| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| 答案 | BC | AD | ACD | ABD |

**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。**

13．$\dfrac{2}{5}$　　14．$\dfrac{7}{9}$　　15．$-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　　16．$\dfrac{8}{3}$

**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

17．（10 分）

（1）因为 $\dfrac{b+c}{\sin B+\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}=2$，………2 分　　所以 $a=2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$．………4 分

（2）因为 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $bc=2$，………6 分

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc(1+\cos A)$，………8 分

所以 $3=(b+c)^2-4\left(1+\cos\dfrac{\pi}{3}\right)$，$b+c=3$，………9 分

所以 $\Delta ABC$ 的周长为 $3+\sqrt{3}$．………10 分

18．（12 分）

（1）设等差数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 的公差为 $d$，由 $a_3-3a_1=6$，得 $\dfrac{a_3}{3}-\dfrac{a_1}{1}=2=2d$，$d=1$，………2 分

由 $a_2=6$ 得 $\dfrac{a_2}{2}=3$，………4 分

所以 $\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_2}{2}+(n-2)$，所以 $a_n=n(n+1)$．………6 分

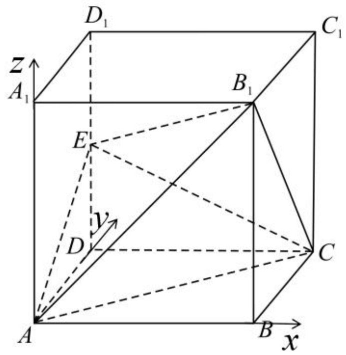
（2）$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，………8 分

$S_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$………10 分

$=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$．………12 分

19.（12 分）

（1）如图，分别以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}$ 为 $x$，$y$，$z$ 轴建立空间直角坐标系 $Axyz$，………1 分




则 $A(0,0,0)$，$B_1(1,0,1)$，$C(1,1,0)$，$E\left(0,1,\dfrac{1}{2}\right)$，

$\overrightarrow{AB_1}=(1,0,1),\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AE}=\left(0,1,\dfrac{1}{2}\right)$，………2 分

设平面 $AB_1C$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+z=0,\\ x+y=0,\end{cases}$

取 $x=1$，则平面 $AB_1C$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$，………3 分

所以点 $E$ 到平面 $AB_1C$ 的距离为 $h=\dfrac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}\right|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ………4 分

又 $AB_1=AC=B_1C=\sqrt{2}$，所以正三角形 $AB_1C$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，………5 分

所以四面体 $AB_1CE$ 的体积为 $V=\dfrac{1}{3}S_{\Delta AB_1C}h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{4}$. ………6 分

（2）设平面 $AB_1E$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+z=0,\\ y+\dfrac{1}{2}z=0,\end{cases}$ ………7 分

取 $y=1$，则平面 $AB_1E$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(2,1,-2)$. …………9 分

所以 $\left|\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>\right|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}\right|=\dfrac{3}{\sqrt{3}\times3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，…………11 分

所以平面 $AB_1E$ 与平面 $AB_1C$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ………12 分

20.（12 分）

（1）由已知 $k<0$，设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则 $\dfrac{x_1^{\ 2}}{a^2}+\dfrac{y_1^{\ 2}}{b^2}=1$ ①，$\dfrac{x_2^{\ 2}}{a^2}+\dfrac{y_2^{\ 2}}{b^2}=1$ ②，…………1 分

①-②得：$\dfrac{x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}}{a^2}+\dfrac{y_1^{\ 2}-y_2^{\ 2}}{b^2}=0$，即 $\dfrac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，…………2 分

又 $k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，$k_{OE}=\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$，所以 $-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{2}$，…………3 分

又 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=1-\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$，所以椭圆 $C$ 的离心率 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. …………5 分

（2）直线 $l$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴分别相交于 $M$，$N$ 两点，且 $|MA|=|NB|$，

$E$ 为线段 $AB$ 的中点，所以 $E$ 也为线段 $MN$ 的中点，

$l$：$y=kx+2$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴的交点为 $M\left(-\dfrac{2}{k},0\right)$，$N(0,2)$，所以 $E\left(-\dfrac{1}{k},0\right)$，$k_{OE}=\dfrac{1}{-\frac{1}{k}}=-k$，

所以 $k_{AB}\cdot k_{OE}=-k^2=-\dfrac{1}{2}$，所以 $k=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$l$：$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+2$，…………7 分

联立直线 $l$：$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2$ 与椭圆 $C:\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，

可得：$x^2-2\sqrt{2}x+4-b^2=0$，$x_1+x_2=2\sqrt{2}$，$x_1x_2=4-b^2$，…………8 分

$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{8-4(4-b^2)}=\sqrt{6}\sqrt{b^2-2}=\sqrt{6}$，…………10 分

所以 $b^2=3,a^2=6$，所以椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$. …………12 分

21.（12 分）

（1）①若 $a\le 0$，因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-a\ln 2>0$，所以不满足题意；………1 分

②若 $a>0$，由 $f'(x)=\frac{a}{x}-1=\frac{a-x}{x}$ 知：………2 分

当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 单调递增，在 $(a,+\infty)$ 单调递减，………3 分

故 $x=a$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的最大值点，………4 分

所以 $f(a)\ge f(1)=0$，又因为 $f(a)\le 0$，所以 $f(a)=0$，故 $a=1$. ………5 分

（2）由（1）知，$f(x)=\ln x-x+1$，且 $x\ge\ln x+1$，

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，要证明 $e^x\sin x-x>f(x)$，只要证 $e^x\sin x>\ln x+1$，………6 分

下面证明 $e^x\sin x>x$：

令 $g(x)=e^x\sin x-x$，$g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)-1=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$，………7 分

$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，所以 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}$，$e^x>e^0=1$，

所以 $g'(x)>\sqrt{2}\times 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}-1=0$，………8 分

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，又 $g(0)=0$，所以 $g(x)>0$，即 $e^x\sin x>x$，………10 分

又因为 $x\ge\ln x+1$，所以 $e^x\sin x>x\ge\ln x+1$，即 $e^x\sin x>\ln x+1$，

所以 $e^x\sin x-x>f(x)$ 得证. ………12 分

22.（12 分）

（1）由题意可设三人合计得分为离散型随机变量 $X$，$X$ 的可能取值为 3，4，5，6，…………1 分

$P(X=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，$P(X=4)=C_3^1\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{12}{27}$，

$P(X=5)=C_3^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{27}$，$P(X=6)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，

所以，$X$ 的分布列是：

| $X$ | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{8}{27}$ | $\frac{12}{27}$ | $\frac{6}{27}$ | $\frac{1}{27}$ | ………3 分 |

$E\left(X\right)=3\times\frac{8}{27}+4\times\frac{12}{27}+5\times\frac{6}{27}+6\times\frac{1}{27}=4$.…………4 分

（2）（i）设甲第二天选择“单车自由行”的概率 $P_2$，

由题意知：$P_2=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$；…………6 分

（ii）甲第 $n\left(n=1,2,\cdots,16\right)$ 天选择“单车自由行”的概率为 $P_n$，

① $P_n=P_{n-1}\cdot\frac{1}{4}+\left(1-P_{n-1}\right)\cdot\frac{2}{3}=-\frac{5}{12}P_{n-1}+\frac{2}{3}\left(n=2,3,\cdots,16\right)$，…………7 分

$\therefore P_n-\frac{8}{17}=-\frac{5}{12}\left(P_{n-1}-\frac{8}{17}\right)$，

又 $\because P_1-\frac{8}{17}=\frac{28}{85}\neq 0$，$\therefore \frac{P_n-\frac{8}{17}}{P_{n-1}-\frac{8}{17}}=-\frac{5}{12}\left(n=2,3,\cdots,16\right)$，

$\therefore$ 数列 $\left\{P_n-\frac{8}{17}\right\}$ 是以 $\frac{28}{85}$ 为首项，以 $-\frac{5}{12}$ 为公比的等比数列，…………8 分

$\therefore P_n=\frac{8}{17}+\frac{28}{85}\cdot\left(-\frac{5}{12}\right)^{n-1}\left(n=1,2,3,\cdots,16\right)$；…………9 分

②由题意知，只需 $P_n>1-P_n$ 即 $P_n>\frac{1}{2}\left(n=1,2,\cdots,16\right)$，…………10 分

$\frac{8}{17}+\frac{28}{85}\cdot\left(-\frac{5}{12}\right)^{n-1}>\frac{1}{2}$，即 $\left(-\frac{5}{12}\right)^{n-1}>\frac{85}{34\times 28}=\frac{5}{56}\left(n=1,2,\cdots,16\right)$，

显然 $n$ 必为奇数，偶数不成立，

故当 $n=1$，3，5，…，15 时，有 $\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}>\frac{5}{56}$ 即可，

当 $n=1$ 时，$\left(\frac{5}{12}\right)^{0}>\frac{5}{56}$，显然成立；

当 $n=3$ 时，$\left(\frac{5}{12}\right)^{2}=\frac{25}{144}>\frac{5}{56}$，成立；

当 $n=5$ 时，$\left(\frac{5}{12}\right)^{4}=\frac{625}{144\times 144}<\frac{5}{56}$，不成立，

又因为 $\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}$ 单调递减，所以 $n>5$ 时不成立．…………11 分

综上，选择“单车自由行”的概率大于“观光电车行”的概率的天数为 2 天.…………12 分