2024届“耀正优+”12月高三名校阶段检测联考·数学

参考答案、提示及评分细则

1.A　设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，则 $(x+y\mathrm{i})\mathrm{i}=2(x-y\mathrm{i})-1$，整理得 $-y+x\mathrm{i}=2x-1-2y\mathrm{i}$，由复数相等，解得 $x=\frac{2}{3}$，$y=-\frac{1}{3}$，故 $x+y=\frac{1}{3}$. 故选 A.来源：高三答案公众号

2.D　$A=(-\infty,0)$，$B=\{-2,-1\}$，$A\cap B=\{-2,-1\}$. 故选 D.

3.A　设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 $a_1>0$，$a_1<a_2$，知 $a_2-a_1=a_1(q-1)>0$，故 $q>1$，从而 $S_n<S_{n+1}$；而对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$S_n<S_{n+1}$，则 $q>0$，所以“$a_1<a_2$”是“对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$S_n<S_{n+1}$”的充分不必要条件. 故选 A.

4.B　设焦点 F 的坐标为 $(c,0)$，$c>0$，直线 BF 的方程为 $bx+cy-bc=0$，则 $\frac{|ab-bc|}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{1}{2}b$，由 $a^2=b^2+c^2$，得 $a=2c$，故离心率 $e=\frac{1}{2}$. 故选 B.

5.C　设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $3a_2a_{10}=S_3^2$，可得 $3(a_1+d)(a_1+9d)=(3a_1+3d)^2$，则 $a_1=-d$（舍）或 $a_1=3d$，故 $a_n=(n+2)d$，故 $\frac{a_{10}}{a_5}=\frac{12}{7}$. 故选 C.

6.D　由 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{3}$，知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

故 $\sin\left(\frac{3\pi}{4}-2\alpha\right)=\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\right]=\sin 2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)=\frac{4\sqrt{2}}{9}$. 故选 D.

7.C　设函数 $f(x)$ 的零点为 t，则 $m\cos t+n+\sin t=0$，

所以点 (m,n) 在直线 $x\cos t+y+\sin t=0$ 上，m^2+n^2 表示原点到点 (m,n) 的距离的平方，

由于 $\sqrt{m^2+n^2}\geqslant\frac{|\sin t|}{\sqrt{\cos^2 t+1}}$，设 $\varphi(t)=\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t+1}$，$t\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$，

易得 $\varphi'(t)=\frac{2\sin 2t}{(\cos^2 t+1)^2}\geqslant 0$，故 $\varphi(t)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

所以 m^2+n^2 的最小值为 $\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}$. 故选 C.

8.B　由已知，$\triangle ABC$ 为直角三角形，$\angle A=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$，$\angle C=60^\circ$，

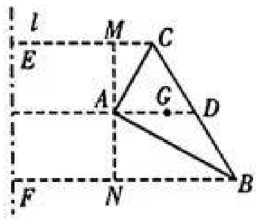
设 BC 中点为 D，$\triangle ABC$ 的重心为 G，如图，作 $CE\perp l$ 于 E，$BF\perp l$ 于 F，

过 A 作 $MN\parallel l$，分别交 CE，BF 于 M，N，$CE=18$，$BF=28$，

设 $\angle ACM=\alpha$，则 $\angle BAN=\alpha$，故 $AB\sin\alpha-AC\cos\alpha=BF-CE=10$，

故 $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha=1$，得 $\alpha=60^\circ$，从而 $AD\parallel CE$，由于 $AG=\frac{20}{3}$，

得 G 点到 l 的距离为 $\frac{59}{3}$，故该底座的体积为 $\frac{5900\sqrt{3}\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3$. 故选 B.

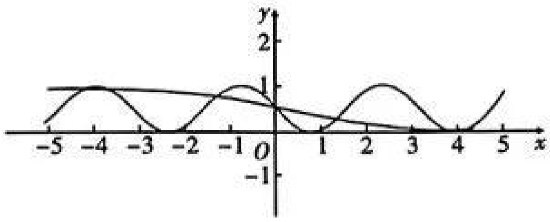


9.ABD　$g(x)=\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1-\sin 2x}{2}$，其周期为 π，A 正确；

$f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1}+\frac{1}{e^{-x}+1}=1$，故 $f(x)=1-f(-$

所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 成中心对称，B 正确；

因为 $g(x)$ 图象关于点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 成中心对称，故函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象交点有奇数个，C 错误；

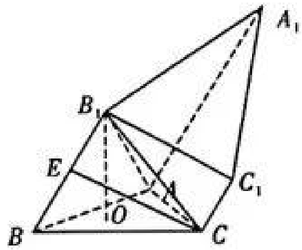


当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，函数 $f(x)$单调递减，$g(x)$在$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$上单调递增，

在$\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$上单调递减，且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}+1}<\frac{1}{2}=g\left(\frac{\pi}{2}\right)$，

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{e^{\frac{3\pi}{4}}+1}<\frac{1}{2}=g(\pi)$，故 $f(x)<g(x)$，D 正确．故选 ABD.

10. BCD　若 $AB//$平面 $A_1B_1C_1$，由于平面 $AA_1B_1B\cap$平面 $A_1B_1C_1=A_1B_1$，



则 $AB//A_1B_1$，与已知矛盾，A 错误；

取 BB_1 中点 E，连接 CE，则 $BE=1,BC=2,\angle B_1BC=60^\circ$，

可得 $CE=\sqrt{3}$，故$\angle BEC=90^\circ$，由于 $B_1C_1//EC,AA_1//BB_1$，

故 B_1C_1 与 AA_1 所成角为 90°，B 正确；

连接 B_1C、B_1A，可知三棱锥 B_1-ABC 为正四面体，

可求出点 B_1 到平面 ABC 的距离为 $h=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，C 正确；

因为 $V_{三棱锥B_1-AA_1C}=V_{三棱锥B-AA_1C}=V_{三棱锥A_1-ABC}$，$V_{三棱锥B_1-AC_1C}=V_{三棱锥B-AC_1C}=V_{三棱锥C_1-ABC}$，

故多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V=V_{三棱锥B_1-ABC}+V_{三棱锥B_1-AA_1C}+V_{三棱锥B_1-AC_1C}$

$=V_{三棱锥B_1-ABC}+V_{三棱锥A_1-ABC}+V_{三棱锥C_1-ABC}$，

故 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\left(h+\frac{1}{2}h+\frac{3}{2}h\right)=S_{\triangle ABC}h=\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{2}$，D 正确．故选 BCD.

11. BD　$1=x+2y\geqslant 2\sqrt{2xy}$，故 $xy\leqslant\frac{1}{8}$，故 A 错误；

$2^x+4^y=2^x+2^{2y}\geqslant 2\sqrt{2^{x+2y}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{4}$时取等号，故 B 正确；

$(x^2+y^2)(1^2+2^2)\geqslant(x+2y)^2$，故 $x^2+y^2\geqslant\frac{1}{5}$，当且仅当 $x=\frac{1}{5},y=\frac{2}{5}$时取等号，故 C 错误；

由于 $x+1+2(y+1)=4$，

故$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{y+1}=\frac{1}{4}[x+1+2(y+1)]\left(\frac{2}{x+1}+\frac{1}{y+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(4+\frac{4(y+1)}{x+1}+\frac{x+1}{y+1}\right)\geqslant\frac{1}{4}\left(4+2\sqrt{\frac{4(y+1)}{x+1}\times\frac{x+1}{y+1}}\right)=2$，

当且仅当 $x=1,y=0$ 时取等号，故 D 正确．故选 BD.

12. CD　由已知 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$，所以$\frac{a_{n+1}-2}{a_n-2}=\frac{\sqrt{a_n+2}-2}{a_n-2}=\frac{1}{\sqrt{a_n+2}+2}>0$，

故 a_n-2 与 $a_{n+1}-2$ 同号，即 a_n-2 与 a_1-2 同号．

若 $a_1\in(0,2)$，则 $a_1-2<0$，则 $a_n-2<0$，故 $a_n<2$，

且 $a_{n+1}^2-a_n^2=a_n+2-a_n^2=-(a_n-2)(a_n+1)>0$，故 $a_{n+1}>a_n$，数列$\{a_n\}$单调递增，A 错误；

若 $a_1\in(2,+\infty)$，可知 $a_n>2$，可得 $a_{n+1}<a_n$，数列$\{a_n\}$单调递减，故 B 错误；故 $2<a_n<a_1$，C 正确；

若 $a_1=1$，则 $a_n<2$，故 $\frac{a_{n+1}-2}{a_n-2}=\frac{\sqrt{a_n+2}-2}{a_n-2}=\frac{1}{\sqrt{a_n+2}+2}>\frac{1}{4}$，故 $a_{n+1}-2<\frac{1}{4}(a_n-2)$，

即有 $n\geqslant 2$ 时，$a_n-2<\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(a_1-2)=-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$，故 $a_n<2-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$，

$S_n=a_1+\cdots+a_n<2n-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n<2n-1$，D 正确．故选 CD.

13．2　由已知，$|a-b|^2=4$，即 $|a|^2+|b|^2-\sqrt{3}|a||b|=4$，又 $a\cdot b-\frac{1}{2}|b|^2=0$，

即 $\frac{\sqrt{3}}{2}|a||b|-\frac{1}{2}|b|^2=0$，解得 $|a|=2$.

14．4　设 x,y 的平均数分别为 $\bar{x},\bar{y}$，x,y 的方差分别为 s_x^2,s_y^2，由已知 $\bar{y}=10$，$s_x^2=0.5$，$s_y^2=2$，由于 $\bar{y}=k\bar{x}+2$，$k^2s_x^2=s_y^2$，得 $\bar{x}=4$.

15．$\left(0,\frac{3}{2}\right]$　由 $|f(x)|\leqslant f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 可知，$x=\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴，

故函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，因为 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$ 上单调，

所以 $\begin{cases}\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{\omega}\leqslant\frac{\pi}{3}\\ \frac{\pi}{6}+\frac{(k+1)\pi}{\omega}\geqslant\frac{5\pi}{6}\end{cases}$，$k\in\mathbf{Z}$，$6k\leqslant\omega\leqslant\frac{3}{2}(k+1)$，由于 $\omega>0$，故 $\begin{cases}k\geqslant 0\\ 6k\leqslant\frac{3}{2}(k+1)\end{cases}$，$k\in\mathbf{Z}$，

故 $k=0$，ω 的取值范围是 $0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$.

另解：由 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\omega+\varphi\right)=1$ 知，$\frac{\pi}{6}\omega+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

故 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\omega$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)=\sin\left(\omega x+2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\omega\right)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\omega\right)$，

由 $2n\pi-\pi\leqslant\omega x-\frac{\pi}{6}\omega\leqslant 2n\pi$，$n\in\mathbf{Z}$，得 $f(x)$ 的单增区间为 $\left[\frac{2n\pi-\pi+\frac{\pi}{6}\omega}{\omega},\frac{2n\pi+\frac{\pi}{6}\omega}{\omega}\right]$，

$n\in\mathbf{Z}$，单减区间为 $\left[\frac{2n\pi+\frac{\pi}{6}\omega}{\omega},\frac{2n\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\omega}{\omega}\right]$，$n\in\mathbf{Z}$，

当 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$ 上单调递增，有 $\begin{cases}\frac{2n\pi-\pi+\frac{\pi}{6}\omega}{\omega}\leqslant\frac{\pi}{3}\\ \frac{2n\pi+\frac{\pi}{6}\omega}{\omega}\geqslant\frac{5\pi}{6}\end{cases}$，解得 $12n-6\leqslant\omega\leqslant 3n$，

由于 $\omega>0$，$\begin{cases}n\geqslant 0\\ 12n-6\leqslant 3n\end{cases}$，$n\in\mathbf{Z}$，无解；

当 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$ 上单调递减，有 $\begin{cases}\frac{2n\pi+\frac{\pi}{6}\omega}{\omega}\leqslant\frac{\pi}{3}\\ \frac{2n\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\omega}{\omega}\geqslant\frac{5\pi}{6}\end{cases}$，解得 $12n\leqslant\omega\leqslant 3n+\frac{3}{2}$，

由于 $\omega>0$，$\begin{cases}n\geqslant 0\\ 12n\leqslant 3n+\frac{3}{2}\end{cases}$，$n\in\mathbf{Z}$，即 $n=0$，故 $0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$.

16. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 设角 A,B,C 的对边 a,b,c，由已知有 $-ac\cos B-ab\cos C=-4bc\cos A$，

故 $a^2=4bc\cos A$，由余弦定理有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即 $\cos A=\frac{b^2+c^2}{6bc}\geqslant\frac{2bc}{6bc}=\frac{1}{3}$，$A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$0<\sin\frac{1}{2}A\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，

由于 $B+C=\pi-A$，$\angle BPC=\pi-\frac{1}{2}(B+C)$，故 $\angle BPC=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}A$，

故 $\cos\angle BPC=-\sin\frac{1}{2}A\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

17. 解：(1)由已知，有 $\frac{a_n}{n}-\frac{4a_{n+1}}{n+1}+\frac{4a_{n+2}}{n+2}=0$，得 $\frac{2^na_n}{n}+\frac{2^{n+2}a_{n+2}}{n+2}=2\times\frac{2^{n+1}a_{n+1}}{n+1}$，

故数列 $\left\{\frac{2^na_n}{n}\right\}$ 为等差数列. …………………………………… 4分

又 $\frac{2a_1}{1}=1$，$\frac{2^2a_2}{2}=2$，从而 $\frac{2^na_n}{n}=n$，

故 $a_n=n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$n\in\mathbf{N}^*$. …………………………………… 5分

(2) $S_n=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}=1\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$2S_n=1\left(\frac{1}{2}\right)^0+2\left(\frac{1}{2}\right)^1+\cdots+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

故 $S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ …………………………………… 8分

$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-n\left(\frac{1}{2}\right)^n=2-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ …………………………………… 10分

18. 解：(1)由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，及 $a^2=b^2+3c^2$，

可得 $c=-b\cos A$，…………………………………… 2分

由正弦定理得 $\sin C=-\sin B\cos A$，

故 $\sin(A+B)=-\sin B\cos A$，…………………………………… 4分

则 $\sin A\cos B=-2\sin B\cos A$，则 $\tan A=-2\tan B$. …………………………………… 6分

(2)由(1)知：$\tan A=-2\tan B$，$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，由 $\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$，

故 $\tan C=\frac{\tan B}{1+2\tan^2B}=\frac{1}{\frac{1}{\tan B}+2\tan B}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2\tan B\times\frac{1}{\tan B}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，…………………………………… 9分

当且仅当 $\tan B=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，故 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $h=c\sin B=\sqrt{3}$. …………………………………… 12分

19. 解：(1) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=|\overrightarrow{BP}||\overrightarrow{BC}|\cos 60^\circ-|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos 45^\circ$

$=|\overrightarrow{BC}|(|\overrightarrow{BP}|\cos 60^\circ-|\overrightarrow{BA}|\cos 45^\circ)=|\overrightarrow{BC}|(\sqrt{2}|\overrightarrow{BA}|\cos 60^\circ-|\overrightarrow{BA}|\cos 45^\circ)=0$

故 $PA\perp BC$，…………………………………… 4分

$PA\perp AB$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，$AB\cap BC=B$，

故：$PA\perp$ 平面 $ABCD$. …………………………………… 6分

另证：设 $PA=a$，在 $\mathrm{Rt}\triangle PAB$ 中，$\angle PBA=45^\circ$，则 $AB=a$，$PB=\sqrt{2}a$，

连接 AC，设 $BC=m$，则在$\triangle ABC$中，

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos\angle ABC=a^2+m^2-2am\cos 45^\circ=a^2+m^2-\sqrt{2}am$，

在$\triangle PBC$中，$PC^2=PB^2+BC^2-2PB\times BC\cos\angle PBC=2a^2+m^2-2\sqrt{2}am\cos 60^\circ=2a^2+m^2-\sqrt{2}am$，

故在$\triangle PAC$中，$PC^2=PA^2+AC^2$，从而 $PA\perp AC$， ………………………………………… 4分

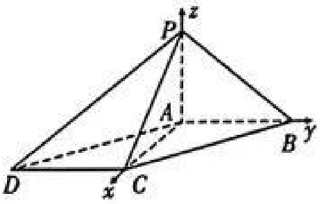
由于 $PA\perp AB$，$AB\subset$平面 $ABCD$，$AC\subset$平面 $ABCD$，$AB\cap AC=A$，

故：$PA\perp$平面 $ABCD$. ………………………………………………………………… 6分

(2)若 $PB=PC$，由(1)可得，$BC=\sqrt{2}a$，$AC=a$，从而 $BC^2=AC^2+AB^2$，

故 $AC\perp AB$，故 AP，AC，AB 两两垂直，以点 A 为坐标原点，

分别以 AC，AB，AP 所在直线为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则有 $C(a,0,0)$，$P(0,0,a)$，$D(a,-a,0)$，$B(0,a,0)$，$\overrightarrow{CD}=(0,-a,0)$，$\overrightarrow{PC}=(a,0,-a)$，$\overrightarrow{BC}=(a,-a,0)$，

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}$，即

$\begin{cases}-ay_1=0\\ ax_1-az_1=0\end{cases}$，

得 $y_1=0$，取 $x_1=z_1=1$，得平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,1)$， ………………………… 8分

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}ax_2-ay_2=0\\ ax_2-az_2=0\end{cases}$，

取 $x_2=y_2=z_2=1$，得平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,1,1)$， ………………………… 10分

故 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1\times1+1\times1}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

设二面角 $D-PC-B$ 为 θ，则 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故二面角 $D-PC-B$ 的正弦值等于$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………… 12分

20. 解：(1)$0.10\times40+0.15\times60+0.15\times80+0.30\times100+0.25\times120+0.05\times140=92$(分).

所以估计第二轮“航模”竞赛 60 名学生的成绩平均分为 92 分. ……………………………… 3分

(2)①设前 3 次答题，甲答 2 次题的概率为 P，则答题情况有两种，第 1 种为“甲甲乙”，

其概率为$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$；第 2 种为“甲乙甲”，其概率为$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$；

故甲答 2 次题的概率 $P=\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3}$. ………………………………………………… 7分

②由已知，$n=1$ 时，$P_1=1$，

$n\geqslant2$ 时，$P_n=\dfrac{2}{3}P_{n-1}+\dfrac{1}{3}(1-P_{n-1})$，即 $P_n=\dfrac{1}{3}P_{n-1}+\dfrac{1}{3}$， ……………………………… 10分

故$\left\{P_n-\dfrac{1}{2}\right\}$构成首项为$\dfrac{1}{2}$，公比为$\dfrac{1}{3}$的等比数列，从而 $P_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{2}$.

所以第 n 次为甲答题的概率为$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$. ……………………………… 12分

21. 解：(1)设切点为$(x_0,f(x_0))$，则 $f'(x_0)=-x_0e^{x_0}=-e$，

设 $g(x_0)=-x_0e^{x_0}+e$，则当 $x_0\leqslant0$ 时，$g(x_0)\geqslant e$，

当 $x_0>0$ 时，$g'(x_0)=-(x_0+1)e^{x_0}<0$，故 $g(x_0)$单调递减，

由 $g(1)=0$ 可知 $g(x_0)$ 有唯一零点 $x_0=1$，故切点为 $(1,-1)$，

从而 $f(1)=-1$，得 $a=1$. …………………………………………………………………… 6 分

(2)当 $n\geqslant 2, n\in N^*$ 时，由(1)知，$f(x)=(1-x)e^x-1$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)=-xe^x<0$，从而 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

故 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<0$，从而 $e^x<\dfrac{1}{1-x}$， …………………………………………… 9 分

故 $x<\ln\dfrac{1}{1-x}$，故当 $n\geqslant 2, n\in N^*$ 时，$\dfrac{1}{n}<\ln\dfrac{n}{n-1}$，

则 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\ln\dfrac{2}{1}+\ln\dfrac{3}{2}+\cdots+\ln\dfrac{n}{n-1}=\ln n$. ………………………………… 12 分

22. 解：(1) $f'(x)=e^x-a$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，则函数 $f(x)$ 单调递增，不可能有两个零点；

当 $a>0$ 时，$x\in(-\infty,\ln a)$，$f'(x)<0$，$x\in(\ln a,+\infty)$，$f'(x)>0$；

则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

故 $[f(x)]_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a+1$， …………………………………………………………… 3 分

要使得 $f(x)$ 有两个零点，必须使 $[f(x)]_{\min}<0$，

令 $a-a\ln a+1<0$，即 $\dfrac{a+1}{a}-\ln a<0$，

令 $g(a)=\dfrac{a+1}{a}-\ln a, a>0$，则 $g'(a)=-\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{a}<0$，

故 $g(a)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的单调递减函数，

由于 $g(3)=\dfrac{4}{3}-\ln 3>0$，$g(4)=\dfrac{5}{4}-\ln 4<0$，所以存在 $a_0\in(3,4)$，使得 $g(a_0)=0$，

当 $a>a_0$ 时，$g(a)<0$，故 $\ln a>\ln a_0>\ln 3$，且 $a\in Z$，故 a 的最小值为 4. ………………………… 5 分

(2)不妨设 $x_1<x_2$，由(1)知，$0<x_1<\ln a<x_2$，

要证 $x_1+x_2>2+\dfrac{2}{a}$. 即证明 $a(x_1+x_2)>2a+2$.

因为 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点，所以 $a=\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}=\dfrac{e^{x_2}+e^{x_1}+2}{x_2+x_1}$，

即证明 $a(x_1+x_2)=e^{x_2}+e^{x_1}+2>\dfrac{2(e^{x_2}-e^{x_1})}{x_2-x_1}+2$，

即证明 $\dfrac{e^{x_2}+e^{x_1}}{2}>\dfrac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}$，即证明 $(x_2-x_1-2)e^{x_2-x_1}+(x_2-x_1)+2>0$，

令 $t=x_2-x_1$，即证明 $(t-2)e^t+t+2>0$，

设 $h(t)=(t-2)e^t+t+2, t>0$，则 $h'(t)=(t-1)e^t+1$，设 $\varphi(t)=h'(t)$，

则 $\varphi'(t)=te^t>0$，从而 $h'(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，由于 $h'(t)>h'(0)=0$，

则 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $h(t)>h(0)=0$，即 $(x_2-x_1-2)e^{x_2-x_1}+(x_2-x_1)+2>0$.

故原式 $x_1+x_2>2+\dfrac{2}{a}$ 成立. ……………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。