2023—2024 学年度上学期高三年级七调考试

数　学

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。共 4 页,总分 150 分,考试时间 120 分钟。

第Ⅰ卷(选择题　共 60 分)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $z=\frac{2+i^7}{(1-i)^2}$,则 z 在复平面内对应的点的坐标为

A. $\left(-\frac{1}{2},1\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},1\right)$　　C. $\left(\frac{1}{2},-1\right)$　　D. $\left(1,\frac{1}{2}\right)$

2. 定义:既是中心对称,也是轴对称的曲线称为“尚美曲线”,下列方程所表示的曲线中不是“尚美曲线”的是

A. $x^2+y^2=4$　　B. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

C. $x^2-y^2=4$　　D. $x^2-y=0$

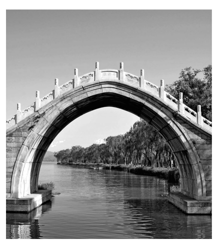
3. 已知直线 $l_1:ax+2y+b=0$ 与直线 $l_2:bx-y+a=0$ 垂直,则 a^2+b^2 的最小值为

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

4. 已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点与双曲线 $C_2:\frac{x^2}{b^2}-\frac{2y^2}{a^2}=1$ 的焦点重合,则 C_2 的渐近线方程为

A. $x\pm y=0$　　B. $\sqrt{2}x\pm y=0$　　C. $\sqrt{3}x\pm y=0$　　D. $2x\pm y=0$

5. 某景区内的一座抛物线拱形大桥,如图所示.该桥抛物线拱形部分的桥面跨度为 10 米,拱形最高点与水面的距离为 6 米,为增加景区的夜晚景色,景区计划在拱形桥的焦点处悬挂一闪光灯,则竖直悬挂的闪光灯距离水面的距离为(结果精确到 0.01)

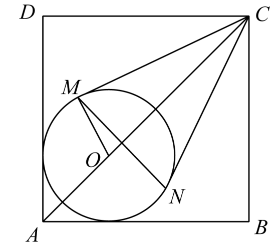


A. 4.96 米　　B. 5.06 米　　C. 4.26 米　　D. 3.68 米

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$左、右顶点分别为 A,B,若该双曲线上存在点 P,使得 PA,PB 的斜率之和为 1,则该双曲线离心率的取值范围是

A. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(1,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

7. 我国古代数学家朱世杰所著的《四元玉鉴》中记载有“锁套吞容”之“方田圆池结角池图”,意思是说,有一块正方形田地,在其一角有一个圆形的水池(其中圆与正方形一角的两边均相切),如图所示.已知圆 O 的半径为 2 丈,过 C 作圆 O 的两条切线,切点分别为 M,N,若 $MN=\sqrt{3}OM$,则对角线 AC 的长度为



A. $4+2\sqrt{2}$ 丈　　B. $2+\sqrt{2}$ 丈

C. $10-2\sqrt{2}$ 丈　　D. $2+4\sqrt{2}$ 丈

8. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $(0,+\infty)$,且 $xf'(x)>(x-1)f(x)$ 恒成立,$f(3)=e$,则不等式 $(x+4)f(x+4)<3e^{x+2}$ 的解集为

A. $(-4,-1)$　　B. $(-1,1)$　　C. $(-1,2)$　　D. $(-1,+\infty)$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 若 α 不论取何值时,圆 C_1 总与圆 $C_2:(x-2-2\cos\alpha)^2+(y+2\sin\alpha)^2=1$ 相切,则圆 C_1 的方程可为

A. $x^2+y^2-4x-5=0$　　B. $x^2+y^2+4x-8=0$

C. $x^2+y^2-4x+3=0$　　D. $x^2+y^2-4x-2=0$

10. 已知 $\alpha,\beta\in(0,2\pi)$且 $\sin\alpha<\sin\beta$,则下列命题中成立的是

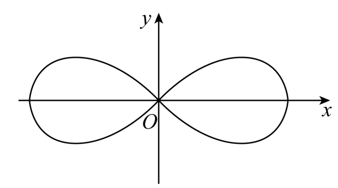
A. 若 α,β 是第一象限角,则 $\cos\alpha<\cos\beta$

B. 若 α,β 是第二象限角,则 $\cos\alpha<\cos\beta$

C. 若 α,β 是第三象限角,则 $\tan\alpha<\tan\beta$

D. 若 α,β 是第四象限角,则 $\tan\alpha<\tan\beta$

11. 如图,双纽线像数字“8”,不仅体现了数学的对称、和谐、简洁、统一的美,同时也具有特殊的有价值的艺术美,是形成其它一些常见的漂亮图案的基石,也是许多设计者设计作品的主要几何元素.曲线 $C:(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$是双纽线,则下列结论正确的是



A. 曲线 C 经过 5 个整点(横、纵坐标均为整数的点)

B. 曲线 C 上任意一点到坐标原点 O 的距离都不超过 2

C. 曲线 C 关于直线 $y=x$ 对称的曲线方程为 $(x^2+y^2)^2=4(y^2-x^2)$

D. 若直线 $y=kx$ 与曲线 C 只有一个交点,则实数 k 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

12. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$的焦点为 $F(1,0)$,斜率存在的直线 l 经过点 $M(2,0)$交 C 于 A,B 两点,C 在 A,B 两点处的切线交于点 P,D 为 AB 的中点,PD 交 C 于点 E,则

A. 点 P 在直线 $x=-3$ 上　　B. E 是 PD 的中点

C. $|AF|,|PF|,|BF|$成等差数列　　D. $PD\perp y$ 轴

第Ⅱ卷(非选择题　共 90 分)

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知圆 C 满足以下两个条件:①圆 C 的半径为$\sqrt{3}$;②直线 $l:x-y+3=0$ 被圆 C 所截得的弦长为 2.写出一个符合以上条件的圆 C 的标准方程为________.

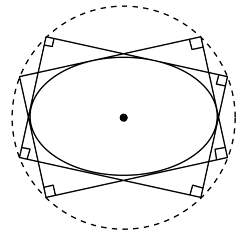
14. 在△ABC 中,若 $\sin C=3\sin A$,$b^2=2ac$,则 $\cos B=$________.

班级

姓名

得分

15. “蒙日圆”涉及几何学中的一个著名定理，该定理的内容为椭圆上任意两条互相垂直的切线的交点，必在一个与椭圆同心的圆上.称此圆为该椭圆的“蒙日圆”，该圆由法国数学家加斯帕尔·蒙日最先发现.如图，已知长方形 R 的四条边均与椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 相切，则长方形 R 的面积的最大值为________.



16. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，点 P 为圆 $E:x^2+y^2-\frac{10}{3}cx+c^2=0$ 与 C 的一个公共点，若 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{4}$，则 C 的离心率为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

在①$(n+1)S_{n+1}-(n+2)S_n=n^2+3n+2$，②$2S_n=(n+1)a_n$，③$a_2=4$，$S_{n+1}+S_{n-1}=2+2S_n(n\geqslant 2)$这三个条件中选择一个，补充在下面的问题中，并给出解答.

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=2$，________.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\left\{\frac{4}{a_na_{n+1}}\right\}$的前 n 项和 T_n.

18.（12 分）

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $x+\sqrt{2}y=0$，点 $A(2,1)$ 在 C 上.

(1)求 C 的方程；

(2)过 C 右焦点的直线 l 交 C 于 P，Q 两点，若 $k_{AP}+k_{AQ}=0$，求 l 的方程.

19.（12 分）

已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，点 $A(2,y_0)$在 C 上，$|AF|=2$.

(1)求 p 的值；

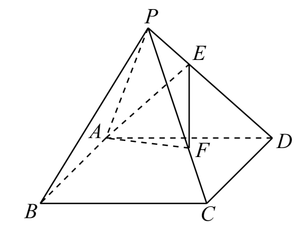
(2)过点 $P(0,-2)$作直线 l，l 与 C 交于 M，N 两点，点 M 关于 y 轴的对称点为 M_1.判断直线 M_1N 是否过定点？若是，求出定点坐标；若不是，请说明理由.

20.（12 分）

如图，已知正四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的所有棱长都为 $3\sqrt{2}$，E，F 两点满足 $\overrightarrow{PD}=3\overrightarrow{PE}$，$\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{FC}$.

(1)求直线 EF 与平面 PAB 所成角的正弦值；

(2)求平面 AEF 截四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 所得较小几何体的体积.



21.（12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，点 M 在 x 轴，y 轴上的射影分别为 A，B，直线 MA，MB 分别交直线 $x+2y=0$ 于 D，E 两点，且$\triangle AOD$ 与$\triangle BOE$ 的面积之和为 1，记点 M 的轨迹为曲线 C.

(1)求 C 的方程；

(2)P，Q 两点在 C 上，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，求$\triangle OPQ$ 的面积的最小值.

22.（12 分）

一款击鼓小游戏的规则如下：每盘游戏都需击鼓三次，每次击鼓要么出现一次音乐，要么不出现音乐.每盘游戏击鼓三次后，出现三次音乐获得 150 分，出现两次音乐获得 100 分，出现一次音乐获得 50 分，没有出现音乐则获得 -300 分，设每次击鼓出现音乐的概率为 $p\left(0<p<\frac{2}{5}\right)$，且各次击鼓出现音乐相互独立.

(1)若一盘游戏中仅出现一次音乐的概率为 $f(p)$，求 $f(p)$的最大值点 p_0；

(2)玩过这款游戏的许多人都发现，若干盘游戏后，与最初的分数相比，分数没有增加反而减少了.设每盘游戏的得分为随机变量 ξ，请运用概率统计的相关知识分析分数减少的原因.