高三数学参考答案

1. B　$|i(3-i)+2|=|3+3i|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

2. D　因为$|\boldsymbol{a}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-5$，所以$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=9+10=19$.

3. C　因为$A=\{x\mid x^2+1\leqslant 10\}=[-3,3]$，$B=\{y\mid y\geqslant -1\}=[-1,+\infty)$，所以$A\cap B=[-1,3]$.

4. C　因为平面$ABC\perp$平面BCD，平面$ABC\cap$平面$BCD=BC$，$BC\perp BD$，
所以$BD\perp$平面ABC，所以$BD\perp AC$. 因为$AB=AC$，O为线段BC的中点，
所以$BC\perp AO$，同理可得$AO\perp$平面BCD.

5. A　由题意$L(p_1)-L(p_2)=a\lg\dfrac{p_1}{p_2}=a\lg 100=60-20$，得$a=20$，$L(p)=20\lg\dfrac{p}{p_0}$，因此$L(p')=20\lg\dfrac{p'}{p_0}\leqslant 50$，$L(p')-L(p_2)=20\lg\dfrac{p'}{p_2}\leqslant 30$，则$p'\leqslant 10\sqrt{10}p_2$. $L(p_1)-L(p')=20\lg\dfrac{p_1}{p'}\geqslant 10$，则$p'\leqslant\dfrac{\sqrt{10}}{10}p_1$.

6. B　由函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象可知$A=2$，$\dfrac{3}{4}T=\dfrac{13\pi}{12}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\pi}{4}$，则$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$. 由$f(\dfrac{13\pi}{12})=2\sin(2\times\dfrac{13\pi}{12}+\varphi)=2$，解得$\varphi=-\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi$，
则$f(x)=2\sin(2x-\dfrac{5\pi}{3})$，故$f(\dfrac{3\pi}{4})=2\sin(2\times\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{5\pi}{3})=-1$.

7. A　因为$a-c=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{32}-\sqrt{27}}{2\sqrt{6}}>0$，所以$a>c$.
$c-b=\sqrt{2}-\sqrt{5}+\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{2}$，因为$(2\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(2\sqrt{5})^2=4\sqrt{6}-9=\sqrt{96}-\sqrt{81}>0$，且$2\sqrt{2}+\sqrt{3}>0$，$2\sqrt{5}>0$，所以$2\sqrt{2}+\sqrt{3}>2\sqrt{5}$，所以$c-b>0$，所以$c>b$. 故$a>c>b$.

8. D　记E的右焦点为F_1，MF的中点为P，连接MF_1，PF_1(图略)，因为$\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{NF}$，$O$为$FF_1$的中点，所以$ON\parallel PF_1$，则$MF\perp PF_1$，从而$|MF_1|=|FF_1|=2c$. 又$\tan\angle MFF_1=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$，所以$\cos\angle MFF_1=\dfrac{|MF|}{2|FF_1|}=\dfrac{3}{4}$，则$|MF|=3c$，$|MF|-|MF_1|=3c-2c=c=2a$，故$E$的离心率为2.

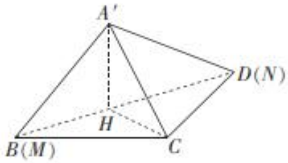
9. AC　将已知的6个数按照从小到大的顺序排列为46，50，54，58，62，80. $7\times 20\%=1.4$，$7\times 40\%=2.8$.
若$x\leqslant 46$，则这组数据的第20百分位数与第40百分位数分别是46和50，$50-46\neq 3$；
若$x\geqslant 54$，则这组数据的第20百分位数与第40百分位数分别是50和54，$54-50\neq 3$.

所以 $46<x<54$，则这组数据的第 20 百分位数与第 40 百分位数分别是 x 和 50，或 50 和 x，则 $|50-x|=3$，解得 $x=47$ 或 53.

10. BCD　因为 $f'(x)=3x^2-6x=3(x-1)^2-3\geqslant-3$，所以 l_m 的斜率的最小值为 -3. 因为 $f'(0)=0$，$f(0)=1$，所以 l_0 的方程为 $y=1$. 因为 $f'(-1)=9$，$f(-1)=-3$，所以 l_{-1} 的方程为 $y+3=9(x+1)$，即 $y=9x+6$.

11. AB　因为 $|CD|=5$，所以 $|PQ|$ 的最小值为 $|CD|-1-2=2$，所以圆 C 与圆 D 外离，圆 C 与圆 D 有 4 条公切线，A，B 均正确. 因为直线 CD 的方程为 $y=-\frac{4}{3}x$，代入 $x^2+y^2=1$，得 $x=\pm\frac{3}{5}$，当 $|PQ|$ 取得最小值时，P 为线段 CD 与圆 C 的交点，所以 P 点的坐标为 $(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$，C 错误. 过点 C 作圆 D 的切线，切点为 M（图略），则 $|CM|=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$，当 P 为线段 MC 的延长线与圆 C 的交点，且点 Q 与 M 重合时，$|PQ|=1+\sqrt{21}$，此时点 D 到直线 PQ 的距离等于 2，D 错误.

12. ABD　设 $AM=x$，因为 $AM=AN$，点 H 为 MN 的中点，所以 $A'H\perp MN$，且 $AH=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，底面 $MBCDN$ 的面积为 $16-\frac{1}{2}x^2(0<x\leqslant4)$，所以五棱锥 $A'-MBCDN$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{6}x(16-\frac{1}{2}x^2)(0<x\leqslant4)$. 当点 M 为 AB 的中点时，五棱锥 $A'-MBCDN$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{6}\times2\times(16-\frac{1}{2}\times2^2)=\frac{14\sqrt{2}}{3}$，A 正确. 当点 M 与点 B 重合时，三棱锥 $A'-BCD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{6}\times4\times(16-\frac{1}{2}\times4^2)=\frac{16\sqrt{2}}{3}$，B 正确. 连接 HC，因为 $A'H\perp HC$，$A'C=A'B=A'D=BC=4$，所以三棱锥 $A'-BCD$ 的表面积为 $16+2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=8(2+\sqrt{3})$，设三棱锥 $A'-BCD$ 内切球的半径为 r，则 $\frac{1}{3}r\times8(2+\sqrt{3})=\frac{16\sqrt{2}}{3}$，解得 $r=4\sqrt{2}-2\sqrt{6}$，C 错误. 五棱锥 $A'-MBCDN$ 的体积 $V(x)=\frac{\sqrt{2}}{6}x(16-\frac{1}{2}x^2)(0<x\leqslant4)$，则 $V'(x)=\frac{\sqrt{2}}{6}(16-\frac{3}{2}x^2)$，令 $V'(x)>0$，得 $0<x<\frac{4\sqrt{6}}{3}$；令 $V'(x)<0$，得 $\frac{4\sqrt{6}}{3}<x\leqslant4$. 所以 $V(x)_{\max}=V(\frac{4\sqrt{6}}{3})=\frac{128\sqrt{3}}{27}$，D 正确.



13. 10　根据抛物线的定义可得点 A 到 C 的焦点的距离 $d=5+\frac{p}{2}=10$，解得 $p=10$.

14. 1120　由 $2^n=256$，得 $n=8$. $(2x^{-2}-x^3)^8$ 的通项公式为 $T_{r+1}=C_8^r(2x^{-2})^{8-r}(-x^3)^r=C_8^r2^{8-r}(-1)^rx^{5r-16}$. 令 $5r-16=4$，得 $r=4$，所以展开式中含 x^4 的项为 $T_5=C_8^42^4x^4=1120x^4$.

15. -7　因为 $f(x)$ 是奇函数，且 $f(x+1)$ 是偶函数，所以 $f(x+1)=f(-x+1)=-f(x-1)=$

$f(x-3)$,故 $f(x)$是 4 为周期的周期函数,则 $f(2023)+f(2024)=f(-1)+f(0)=-f(1)$
$=-7$.

16. $2\sqrt{3}$　$\tan 80°-\tan 20°=\tan(80°-20°)(1+\tan 80°\tan 20°)=\sqrt{3}(1+\dfrac{\sin 80°\sin 20°}{\cos 80°\cos 20°})=$

$\sqrt{3}(1+\dfrac{\cos 10°\sin 20°}{\sin 10°\cos 20°})=\sqrt{3}(1+\dfrac{2\cos^2 10°}{\cos 20°})=\sqrt{3}(1+\dfrac{1+\cos 20°}{\cos 20°})=\sqrt{3}(2+\dfrac{1}{\cos 20°})$,

所以$\dfrac{\tan 80°-\tan 20°}{1+\dfrac{1}{2\cos 20°}}=2\sqrt{3}$.

17. 解:(1)设$\{a_n\}$的公差为 d,则$\begin{cases}a_1+2d=13,\\a_1+12d=53,\end{cases}$ ……………………………………………… 2 分

解得$\begin{cases}a_1=5,\\d=4,\end{cases}$ ……………………………………………………………………………… 4 分

所以 $a_n=4n+1$. ……………………………………………………………………… 5 分

(2)(方法一)$S_n=2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+\dfrac{-1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)}$ ……………………………………… 7 分

$=2\times\dfrac{(5+4n+1)n}{2}-\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$ ……………………………………………………… 9 分

$=4n^2+6n-\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$. ………………………………………………………………… 10 分

(方法二)当 n 为偶数时,$S_n=2(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ ………………………………………………… 6 分

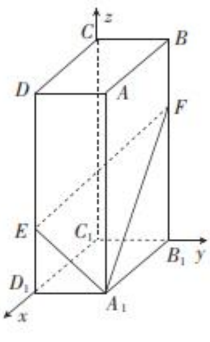
$=2\times\dfrac{(5+4n+1)n}{2}=4n^2+6n$; …………………………………………………………… 7 分

当 n 为奇数时,$S_n=2(a_1+a_2+\cdots+a_n)-1$ ……………………………………………………… 8 分

$=4n^2+6n-1$. ………………………………………………………………………………… 9 分

综上,$S_n=\begin{cases}4n^2+6n-1, n\text{ 为奇数},\\4n^2+6n, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$ ……………………………………………………… 10 分

18. 解:以 C_1 为坐标原点,C_1D_1,C_1B_1,C_1C 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系, ……………………………………………… 1 分



则 $A_1(2,1,0)$,$E(2,0,1)$,$F(0,1,2)$,所以$\overrightarrow{A_1E}=(0,-1,1)$,$\overrightarrow{EF}=(-2,1,1)$. …………………………………………………………… 3 分

(1)证明:因为$\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{EF}=0$,所以 $EF\perp A_1E$. ……………………………… 5 分

(2)设平面 A_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\overrightarrow{A_1E}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}-y+z=0,\\-2x+y+z=0.\end{cases}$

不妨取 $z=1$,则 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$. ……………………………………………………………… 7 分

易得 $C_1C\perp$平面 $ABCD$,所以$\overrightarrow{C_1C}$是平面 $ABCD$ 的一个法向量,且$\overrightarrow{C_1C}=(0,0,3)$. …… 9 分

$\cos\langle \boldsymbol{m},\overrightarrow{C_1C}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{C_1C}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{C_1C}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. …… 11 分

故平面 A_1EF 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. …… 12 分

19. 解:(1)因为$(a-c)\cos B=b(\cos A-\cos C)$,所以$(\sin A-\sin C)\cos B=(\cos A-\cos C)\sin B$, …… 1 分

则 $\sin A\cos B-\sin C\cos B=\cos A\sin B-\cos C\sin B$,则 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin C\cos B-\cos C\sin B$,则 $\sin(A-B)=\sin(C-B)$, …… 2 分

所以 $A-B=C-B$,即 $A=C$ 或 $A-B+C-B=\pi$(舍去). …… 3 分

由 $A=C$,得 $a=c$,因为 $c^2+3b^2=2a^2$,所以 $a^2=3b^2$,即 $a=\sqrt{3}b$, …… 5 分

则$\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{a}{b}=\sqrt{3}$. …… 6 分

(2)由 $c^2+3b^2=2a^2$,得 $b^2=\dfrac{2}{3}a^2-\dfrac{1}{3}c^2$,

则 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+c^2-\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{3}c^2}{2ac}=\dfrac{a}{6c}+\dfrac{2c}{3a}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{a}{6c}\cdot\dfrac{2c}{3a}}=\dfrac{2}{3}$, …… 8 分

当且仅当 $a=2c=2$ 时,等号成立,$\cos B$ 取得最小值$\dfrac{2}{3}$, …… 9 分

此时 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, …… 10 分

所以$\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. …… 12 分

20. 解:(1)依题意可得$\begin{cases}-a=-2,\\ \dfrac{\frac{7}{4}}{a^2}+\dfrac{\frac{27}{16}}{b^2}=1,\end{cases}$ …… 2 分

解得 $a=2,b^2=3$, …… 3 分

所以 M 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. …… 4 分

(2)联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-1),\end{cases}$ 消去 y 得$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4(k^2-3)=0$, …… 5 分

则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$,$x_1x_2=\dfrac{4(k^2-3)}{3+4k^2}$. …… 6 分

因为 $y=k(x-1)$经过定点$(1,0)$,且点$(1,0)$在 M 的内部,所以 $\Delta>0$ 恒成立. …… 7 分

由$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{8k^2}{4(k^2-3)}=-1$, …… 8 分

解得 $k^2=1$. …………………………………………………………………… 9 分

所以 $x_1+x_2=\frac{8}{7}$，$x_1x_2=-\frac{8}{7}$，……………………………………………… 10 分

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{(\frac{8}{7})^2+4\times\frac{8}{7}}=\frac{24}{7}$. ………… 12 分

21. 解：(1) X 的可能取值为 2，3，4，………………………………………………… 1 分

则 $P(X=2)=(\frac{2}{5})^2=\frac{4}{25}$，$P(X=3)=2\times\frac{2}{5}\times(1-\frac{2}{5})=\frac{12}{25}$，$P(X=4)=(1-\frac{2}{5})^2=\frac{9}{25}$，…

……………………………………………………………………………………… 4 分

则 X 的分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{25}$

……………………………………………………………………………………… 5 分

故 $E(X)=2\times\frac{4}{25}+3\times\frac{12}{25}+4\times\frac{9}{25}=\frac{80}{25}=\frac{16}{5}$. …………………………………… 6 分

(2) 当 $n\geqslant 3$ 时，得分累计 n 分，即在得到 $n-1$ 分后再得 1 分，或在得到 $n-2$ 分后再得 2 分，

……………………………………………………………………………………… 7 分

所以 $P(n)=\frac{2}{5}P(n-1)+\frac{3}{5}P(n-2)$，……………………………………………… 8 分

则 $P(n)-P(n-1)=-\frac{3}{5}[P(n-1)-P(n-2)]$. ………………………………………… 9 分

因为 $P_1=\frac{2}{5}$，$P_2=\frac{3}{5}+(\frac{2}{5})^2=\frac{19}{25}$，所以 $P_2-P_1=\frac{9}{25}$，

所以 $\{P(n+1)-P(n)\}$ 为等比数列，且首项为 $\frac{9}{25}$，公比为 $-\frac{3}{5}$，……………………… 10 分

则 $P(n+1)-P(n)=\frac{9}{25}(-\frac{3}{5})^{n-1}$，$P_n-P_1=P_2-P_1+P_3-P_2+\cdots+P_n-P_{n-1}=\frac{9}{25}\times[1+$

$(-\frac{3}{5})+\cdots+(-\frac{3}{5})^{n-2}]=\frac{9}{25}\times\dfrac{1-(-\frac{3}{5})^{n-1}}{1-(-\frac{3}{5})}$，……………………………………… 11 分

则 $P_n=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}(-\frac{3}{5})^n$，故当 $n\geqslant 3$ 时，$P_n=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}(-\frac{3}{5})^n$. …………………………… 12 分

22. (1) 解：当 $a=0$ 时，$f'(x)=e^x-1$. ……………………………………………… 1 分

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$. …………………………………… 2 分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$. ……………………… 3 分

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，且极小值为 -1，$f(x)$ 无极大值. ……………………… 4 分

(2)证明:$f'(x)=e^x-3ax^2-1$ 的导函数 $f''(x)=e^x-6ax$,$f''(x)$的导函数 $f'''(x)=e^x-6a$.
…………………………………………………………………………………… 5分

当 $x\geqslant0$,且 $a\leqslant\frac{1}{6}$时,$f'''(x)=e^x-6a\geqslant0$, ………………………………………… 6分

所以 $f''(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,所以 $f''(x)\geqslant f''(0)=1$,当且仅当 $x=0$ 时,等号成立.
…………………………………………………………………………………… 7分

令函数 $F(x)=[f'(x)+f'(x_2)](x-x_2)-2[f(x)-f(x_2)]$,

则 $F'(x)=f''(x)(x-x_2)-f'(x)+f'(x_2)$,$F''(x)=f'''(x)(x-x_2)$. ………………… 8分

当 $x>x_2\geqslant0$ 时,$F''(x)>0$,所以 $F'(x)$在$(x_2,+\infty)$上单调递增, ……………………… 9分

则 $F'(x)>F'(x_2)=0$,所以 $F(x)$在$(x_2,+\infty)$上单调递增, ……………………… 10分

则 $F(x)>F(x_2)=0$,即$[f'(x)+f'(x_2)](x-x_2)-2[f(x)-f(x_2)]>0$, ………… 11分

因为 $x_1>x_2$,所以$[f'(x_1)+f'(x_2)](x_1-x_2)-2[f(x_1)-f(x_2)]>0$,

又 $x_1-x_2>0$,所以$\frac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2}>\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$. ………………………………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。