

大联考长郡中学 2024 届高三月考试卷(四)

数 学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。)

1. 设集合  $M=\{x|-1<x<3\}$ ,  $N=\{-2,-1,0,1\}$ , 则  $M\cap N=$   
A.  $\{-1,0,1\}$  B.  $\{0,1\}$   
C.  $\{x|-1<x<1\}$  D.  $\{x|-1<x\leq 1\}$
2. 已知  $i$  是虚数单位,若  $(a+2i)(1+i)=4i$ , 则实数  $a=$   
A. 2 B. 0 C. -1 D. -2
3. 设随机变量  $X\sim N(\mu, \sigma^2)$ , 且  $P(X<a)=3P(X\geq a)$ , 则  $P(X\geq a)=$   
A. 0.75 B. 0.5 C. 0.3 D. 0.25
4. 已知  $a=\log_2\sqrt{6}$ ,  $b=\log_4 5$ ,  $c=\log_5 2$ , 则下列结论正确的是  
A.  $b<c<a$  B.  $c<b<a$   
C.  $b<a<c$  D.  $c<a<b$
5. 已知圆锥的高为 3, 若该圆锥的内切球的半径为 1, 则该圆锥的表面积为  
A.  $6\pi$  B.  $6\sqrt{3}\pi$  C.  $9\pi$  D.  $12\pi$
6. 已知角  $\alpha\in(0, \frac{\pi}{2})$ , 且满足  $3\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=\cos\alpha$ , 则  $\sin\alpha+2\cos\alpha=$   
A. -2 B.  $\frac{25}{16}$  C.  $-\frac{25}{16}$  D. 2
7. 在等腰  $\triangle ABC$  中,  $AC=CB=2$ ,  $\angle CAB=30^\circ$ ,  $\triangle ABC$  的外接圆圆心为  $O$ , 点  $P$  在优弧  $\widehat{AB}$  上运动, 则  $[\vec{PO}-2(\frac{\vec{PA}}{|\vec{PA}|}+\frac{\vec{PB}}{|\vec{PB}|})]\cdot\vec{PC}$  的最小值为  
A. 4 B. 2 C.  $-2\sqrt{3}$  D. -6

数学试题(长郡版) 第 1 页(共 5 页)



8. 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F(3, 0)$ , 过点  $F$  的直线交椭圆  $E$  于  $A, B$  两点,

若  $AB$  的中点坐标为  $(1, -1)$ , 则椭圆  $E$  的方程为

A.  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

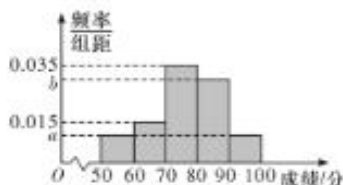
B.  $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1$

C.  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

D.  $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$

二、选择题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.)

9. 党的二十大报告提出, 要加快发展数字经济, 促进数字经济与实体经济的深度融合, 数字化构建社区服务新模式成为一种时尚. 某社区为优化数字化社区服务, 问卷调查调研数字化社区服务的满意度, 满意度采用计分制(满分 100 分), 统计满意度绘制成如右频率分布直方图, 图中  $b = 3a$ , 则下列结论正确的是



A.  $a = 0.01$

B. 满意度计分的众数为 80 分

C. 满意度计分的 75% 分位数是 85 分

D. 满意度计分的平均分是 76.5

10. 已知函数  $f(x) = a \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x (a > 0)$  的最大值为  $2\sqrt{3}$ , 则下列结论正确的是

A. 函数  $f(x)$  的最小正周期为  $\frac{\pi}{2}$

B.  $a = 3$

C. 函数  $f(x)$  的图象关于直线  $x = -\frac{\pi}{12}$  对称

D. 函数  $f(x) = -\sqrt{3}$  在区间  $(0, \pi)$  内有两个不同实根

11. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1 - 2a_n} (n \in \mathbb{N}^+)$ , 数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = a_n a_{n+1}$ , 记数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则下列结论正确的是

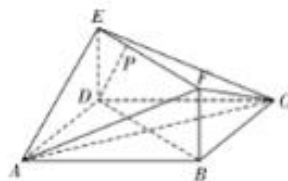
A. 数列  $\{\frac{1}{a_n}\}$  是等差数列

B.  $\frac{2}{a_{10}} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_{18}}$

C.  $S_n < -\frac{1}{2}$

D.  $S_n \geq -1$

12. 如图, 在多面体  $ABCDEF$  中, 底面  $ABCD$  是边长为  $\sqrt{2}$  的正方形,  $DE = BF = 1, DE \parallel BF, DE \perp$  平面  $ABCD$ , 动点  $P$  在线段  $EF$  上, 则下列说法正确的是



A.  $AC \perp DP$

B. 存在点  $P$ , 使得  $DP \parallel$  平面  $ACF$

C. 当动点  $P$  与点  $F$  重合时, 直线  $DP$  与平面  $AFC$  所成角的余弦值为  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

D. 三棱锥  $A-CDE$  的外接球被平面  $ACF$  所截取的截面面积是  $\frac{9\pi}{2}$

三、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.)

13. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 2, \\ \log_3(2+x), & x > 2, \end{cases}$  则  $f(f(7))$  的值为\_\_\_\_\_.
14. 2023 年 10 月国庆节旅游黄金周期间,自驾游爱好者甲、乙、丁 3 家组团自驾去杭州旅游,3 家人分别乘坐 3 辆车,沪昆高速杭州入口有 A,B,C 共 3 个不同的窗口,则每个窗口恰好都有一位该团的自驾车在等候的概率为\_\_\_\_\_.
15. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ,过  $F_2$  作一条直线与双曲线的右支交于 A,B 两点,坐标原点为 O,若  $|OA| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $|BF_1| = 5a$ ,则该双曲线的离心率为\_\_\_\_\_.
16. 已知关于  $x$  的不等式  $x^2 - k(x+1)e^x > 0$  恰有 3 个不同的正整数解,则实数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

四、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 10 分)

在  $\triangle ABC$  中, $a, b, c$  分别为内角  $A, B, C$  的对边,且  $2a \sin A + c \sin B + b \sin C = 2b \sin B + 2c \sin C$ .

(1)求角  $A$  的大小;

(2)设角  $A$  的内角平分线交  $BC$  于点  $M$ ,若  $\triangle ABC$  的面积为  $6\sqrt{3}$ ,  $AM = 3\sqrt{3}$ ,求  $b+c$  的值.

18. (本小题满分 12 分)

已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且满足  $S_7 = 49, 2a_4 = a_5 + 9$ , 数列  $\{b_n\}$  满足  $b_1 = 4, b_{n+1} = 3b_n - a_n$ .

(1) 证明: 数列  $\{b_n - n\}$  是等比数列, 并求  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的通项公式;

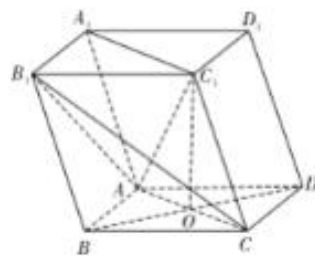
(2) 已知数列  $\{c_n\}$  满足  $c_n = \begin{cases} b_n - n, & n \text{ 为奇数,} \\ a_n, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$  求数列  $\{c_n\}$  的前  $2n$  项和  $T_{2n}$ .

19. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 底面  $ABCD$  为正方形,  $AC$  与  $BD$  交于点  $O$ , 平面  $A_1C_1CA \perp$  平面  $ABCD, AB = \sqrt{2}, AA_1 = 2, CC_1$  与底面  $ABCD$  所成的角为  $60^\circ$ .

(1) 求证:  $C_1O \perp$  平面  $ABCD$ ;

(2) 求平面  $ACB_1$  与平面  $CDD_1C_1$  的夹角的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知圆  $C: x^2 + y^2 = 2x$ , 动点  $P$  在  $y$  轴的右侧,  $P$  到  $y$  轴的距离比它到的圆心  $C$  的距离小 1.

(1) 求动点  $P$  的轨迹  $E$  的方程;

(2) 过圆心  $C$  作直线  $l$  与轨迹  $E$  和圆  $C$  交于四个点, 自上而下依次为  $A, M, N, B$ , 若  $|AM| + |NB| = 2|MN|$ , 求  $|AB|$  及直线  $l$  的方程.

## 21. (本小题满分 12 分)

华为 Mate60Pro 的问世,代表了华为在智能手机技术领域的最新成果,展示了其在 5G+通信技术、人工智能、摄像头技术等方面的创新能力,带动了上下游产业链的发展,推动自主创新方面的决策和能力. 华为下游的某企业快速启动无线充电器主控芯片生产,试产期每天都需同步进行产品检测,检测包括智能检测和人工检测,选择哪种检测方式的规则如下:第一天选择智能检测,随后每天由计算机随机等可能生成数字“0”或“1”,连续生成 4 次,把 4 次的数字相加,若和小于 3,则该天的检测方式和前一天相同,否则选择另一种检测方式.

(1)求该企业前三天的产品检测选择智能检测的天数  $X$  的分布列;

(2)当地政府为了检查该企业是否具有一定的智能化管理水平,采用如下方案:设  $P_n (n \in \mathbf{N}^+)$

表示事件“第  $n$  天该企业产品检测选择的是智能检测”的概率,若  $P_n > \frac{1}{2}$  恒成立,认为该企业具有一定的智能化管理水平,将获得华为集团给予该企业一定的资金援助,否则将没有资金援助. 请问该企业能否拿到资金援助? 请说明理由.

## 22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = e^x + (a-1)x - 1$ , 其中  $a \in \mathbf{R}$ .

(1)讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2)当  $a > 1$  时,证明:  $f(x) > x \ln x - a \cos x$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线