天一大联考

顶尖联盟2023—2024学年高三秋季期中检测

数 学

在本试卷上无效.

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x \mid a^2-a<x<2, x\in \mathbf{Z}\}$ 中恰有两个元素，则实数 a 的取值范围为

A. $[0,1]$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $[1,2]$

2. 在复平面内，复数 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ 对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 里氏震级(M)是表示地震规模大小的尺度，它与观测点处地震仪记录到的地震波最大振幅(A)和观测点处规模为0的地震所对应的振幅(A_0)有关，其计算公式为 $M=\lg\dfrac{A}{A_0}$. 2023年8月6日2时33分，山东德州平原县发生5.5级地震，29分后又发生3.0级地震，用 $A_{5.5}$ 和 $A_{3.0}$ 分别表示震级为5.5和3.0时观测点处地震仪记录到的地震波最大振幅，则 $\dfrac{A_{5.5}}{A_{3.0}}\approx$

参考数据：$\sqrt{10}\approx 3.16$.

A. 316　　B. 250　　C. 31.6　　D. 25

4. 已知函数 $f(x)=a\sin x+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 对称，则实数 a 的值为

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

5. 某班男生人数是女生人数的两倍，某次数学考试中男生成绩(单位：分)的平均数和方差分别为120和20，女生成绩的平均数和方差分别为123和17，则全班学生数学成绩的方差为

A. 21　　B. 19　　C. 18　　D. $\dfrac{37}{2}$

6. 玩积木有利于儿童想象力和创造力的培养.一小朋友在玩四棱柱形积木(四个侧面有各不相同的图案)时,想用5种颜色给积木的12条棱染色,要求侧棱用同一种颜色,其余棱用另4种颜色,且在积木的6个面中,除侧棱的颜色相同外,同一面内再无同色的棱,则染法总数为

A. 216　　B. 360　　C. 720　　D. 1 080

7. 已知 ω 是正整数,函数 $f(x)=\sin(\omega x+\omega)$ 在区间 $(0,\omega\pi)$ 内恰好有4个零点,其导函数为 $f'(x)$,则 $f(x)+f'(x)$ 的最大值为

A. 2　　B. $\sqrt{5}$　　C. 3　　D. $\sqrt{10}$

8. 已知过点 $P(-2,2)$ 的直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A,B 两点,且 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$,点 Q 满足 $\overrightarrow{QA}=-\lambda\overrightarrow{QB}$,点 $C(4,0)$,则 $|QC|$ 的最小值为

A. $2\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,公差为 d,且 $S_7>S_6>S_8$,则下列结论中正确的是

A. $a_5+a_{10}>0$　　B. $d<0$

C. $S_{14}<0$　　D. 当 $n=7$ 时,S_n 取得最大值

10. 已知 F_1,F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点,点 A 在椭圆上,且 $AF_1\perp F_1F_2$,直线 AF_2 与椭圆的另一个交点为 B,且 $\overrightarrow{AF_2}=3\overrightarrow{F_2B}$,则下列结论中正确的是

A. 椭圆的长轴长是短轴长的 $\sqrt{6}$ 倍　　B. 线段 AF_1 的长度为 $\frac{2}{3}a$

C. 椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\triangle BF_1F_2$ 的周长为 $\frac{6+\sqrt{3}}{3}a$

11. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2-x+1}{e^x}$,则

A. $f(x)$ 的极大值为 $\frac{3}{e^2}$

B. 存在无数个实数 m,使关于 x 的方程 $f(x)=m$ 有且只有两个实根

C. $f(x)$ 的图象上有且仅有两点到直线 $y=1$ 的距离为1

D. 若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant ax$ 的解集内存在正整数,则 a 存在最大值,且最大值为 $\frac{1}{e}$

12. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的棱长均为2,M,N 分别为棱 PD,BC 的中点,动点 Q 满足 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=0$,则下列结论中正确的是

A. 动点 Q 的轨迹是半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的球面

B. 点 P 在动点 Q 的轨迹外部

C. 动点 Q 的轨迹被平面 $ABCD$ 截得的是半径为 $\frac{\sqrt{10}}{4}$ 的圆

D. 动点 Q 的轨迹与平面 PAB 有交点

、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 写出对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $\sin(x+\theta)=\sin x\sin\theta+\cos x\cos\theta$ 成立的一个 θ 的值：________.

14. 过点 P 向圆 $C_1:x^2+y^2-2x-3y+3=0$ 作切线，切点为 A，过点 P 向圆 $C_2:x^2+y^2+3x-2y+2=0$ 作切线，切点为 B，若 $|PA|=|PB|$，则动点 P 的轨迹方程为________.

15. 已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$AD=3$，$BC=1$，$PB=3\sqrt{2}$，$PA\perp AB$，$AD\perp$ 平面 PAB. 当四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大时，$\cos\angle CPD=$________.

16. 已知函数 $f(x)=x^2-\frac{1}{2}\ln x+ax$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上没有零点，则实数 a 的取值范围是________.

四、解答题：共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$\sqrt{3}b\tan B=a\cos C+c\cos A$.

(Ⅰ)求角 B；

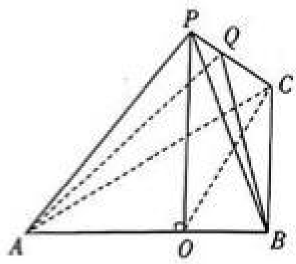
(Ⅱ)过点 A 作 $AD/\!/BC$，连接 CD，使 A,B,C,D 四点组成四边形 $ABCD$，若 $AB=\frac{\sqrt{7}}{2}$，$AC=1$，$CD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 AD 的长.

18. (12分)

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=CA=15$，$PB=CB=13$，$AB=14$，$PC=12\sqrt{2}$，$PO\perp AB$ 于点 O.

(Ⅰ)证明：$CO\perp$ 平面 PAB；

(Ⅱ)若点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{QC}$，求二面角 $P-AB-Q$ 的余弦值.



9. (12分)

已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线的倾斜角为30°，其中一个焦点到 E 上的点的最小距离为 $2-\sqrt{3}$.

(Ⅰ)求 E 的方程；

(Ⅱ)已知直线 $l:y=x-2$ 与双曲线 E 交于 A,B 两点，过 A,B 作直线 l 的垂线分别交 E 于另一点 D,C，求四边形 $ABCD$ 的面积.

20. (12 分)

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_1+S_2+\cdots+S_n=4a_n-2n-4$.

(Ⅰ)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(Ⅱ)记 $b_n=\log_2 a_n$，求证：$\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{b_2^2}+\cdots+\frac{1}{b_n^2}<\frac{5}{3}$.

21. (12 分)

第 19 届亚运会于 2023 年 9 月 23 日至 10 月 8 日在杭州举行，亚运会的召开推动了全民健身的热潮. 某小区甲、乙、丙、丁四位乒乓球爱好者准备开展一次乒乓球比赛. 每两人进行一场比赛，胜一场得 1 分，负一场得 0 分，最终累计得分最高者获得冠军，若多人积分相同，则名次并列. 已知甲胜乙、丙、丁的概率均为$\frac{2}{3}$，乙胜丙、丁的概率均为$\frac{3}{5}$，丙胜丁的概率为$\frac{1}{2}$，且各场比赛的结果相互独立.

(Ⅰ)设比赛结束后，甲的积分为 X，求 X 的分布列和期望;

(Ⅱ)在甲获得冠军的条件下，求乙也获得冠军的概率.

22. (12 分)

已知函数 $f(x)=e^x\sin x-a\ln(x+1)(a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)若 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点，求 a 的值;

(Ⅱ)若 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$，$\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$ 上各有一个零点，求 a 的取值范围.

参考数据：$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}>1$.

天一大联考
顶尖联盟2023—2024学年高三秋季期中检测
数学·答案

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.

1. 答案 B

命题意图 本题考查集合的定义.

解析 由题意可知 $-1\leqslant a^2-a<0$,解得 $a\in(0,1)$.

2. 答案 D

命题意图 本题考查复数的几何意义.

解析 $z=\frac{2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{\mathrm{i}^2}=-\mathrm{i}(2+\mathrm{i})=1-2\mathrm{i}$,由复数的几何意义可得该复数在复平面内对应的点位于第四象限.

3. 答案 A

命题意图 本题考查函数模型.

解析 由题意得,$5.5=\lg\frac{A_{5.5}}{A_0}$,$3.0=\lg\frac{A_{3.0}}{A_0}$,从而 $\frac{A_{5.5}}{A_0}=10^{5.5}$,$\frac{A_{3.0}}{A_0}=10^{3.0}$,因此 $\frac{A_{5.5}}{A_{3.0}}=\frac{10^{5.5}}{10^{3.0}}=10^{2.5}=10^2\times\sqrt{10}\approx316$.

4. 答案 B

命题意图 本题考查利用导数研究三角函数的性质.

解析 由题可知 $x=\frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的一个极值点,$f'(x)=a\cos x-\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$,所以 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\cos\frac{\pi}{3}-\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=0$,解得 $a=2$.

5. 答案 A

命题意图 本题考查平均数与方差的计算.

解析 设该班女生人数为 m,则男生人数为 $2m$. 由题意,全班学生数学成绩的平均数为 $\bar{x}=\frac{120\times2m+123\times m}{3m}=121$,方差 $s^2=\frac{1}{3m}\{2m\times[20+(120-121)^2]+m\times[17+(123-121)^2]\}=21$.

6. 答案 D

命题意图 本题考查排列组合的应用和四棱柱的概念.

解析 首先,任选一种颜色染侧棱,有5种选法,其次,用其余4种颜色染下底面的4条棱,有 $\mathrm{A}_4^4=24$ 种染法,最后根据条件染上底面的棱有9种染法,根据乘法原理,可知染法总数为 $5\times24\times9=1\ 080$ 种.

7. 答案 B

命题意图 本题考查三角函数的性质及导数的应用.

解析 令 $t=\omega x+\omega$,则 $t\in(\omega,\omega^2\pi+\omega)$,为保证有4个零点,首先至少满足区间长度 $L=\omega^2\pi+\omega-\omega>\frac{3}{2}T=\frac{3\pi}{\omega}$,解得 $\omega>\sqrt[3]{3}$,又因为 ω 是正整数,所以 ω 可取 $2,3,4,\cdots$,当 $\omega=2$ 时 $f(x)=\sin(2x+2)$,$x\in(0,2\pi)$,$2x+2\in(2,4\pi+2)$,画图易知满足题意,其他正整数均不符合题意,所以 $f(x)=\sin(2x+2)$,$f'(x)=2\cos(2x+2)$,所以 $f(x)+f'(x)=\sqrt{5}\sin(2x+2+\varphi)\leqslant\sqrt{5}$(其中 $\tan\varphi=2$),故 $f(x)+f'(x)$ 的最大值为 $\sqrt{5}$.

8. **答案** C

命题意图 本题考查直线和抛物线的位置关系以及平面向量的运算.

解析 易知直线 l 的斜率存在且不为0,设直线 l 的方程为 $y=k(x+2)+2$,与抛物线方程联立可得 $ky^2-4y+8k+8=0$,$\Delta=16-4k(8k+8)>0$,所以 $2k^2+2k-1<0$. 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=\frac{4}{k}$,$y_1y_2=\frac{8k+8}{k}$. 设 $Q(x_0,y_0)$,由 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$,得 $y_1-2=\lambda(y_2-2)$①,由 $\overrightarrow{QA}=-\lambda\overrightarrow{QB}$ 得 $y_1-y_0=-\lambda(y_2-y_0)$②,由①②消去 λ 得 $(y_0+2)(y_1+y_2)-2y_1y_2-4y_0=0$,把 $y_1+y_2=\frac{4}{k}$,$y_1y_2=\frac{8k+8}{k}$ 代入,再由 $k=\frac{y_0-2}{x_0+2}$,化简可得 $x_0-y_0-2=0$,所以 $|QC|$ 的最小值即为点 $C(4,0)$ 到直线 $x-y-2=0$ 的距离 $\sqrt{2}$,经检验,此时满足 $2k^2+2k-1<0$.

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分. 每小题全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. **答案** BCD

命题意图 本题考查等差数列的性质,以及求和公式的应用.

解析 因为 $S_7>S_6>S_8$,所以 $a_5+a_{10}=a_7+a_8=S_8-S_6<0$,故A错误;因为 $a_8=S_8-S_7<0$,$a_7=S_7-S_6>0$,所以 $d=a_8-a_7<0$,故B正确;因为 $a_7+a_8<0$,所以 $S_{14}=\frac{14(a_7+a_8)}{2}<0$,故C正确;因为 $a_8<0$,$a_7>0$,所以 $a_1>0$,$d<0$,等差数列 $\{a_n\}$ 为递减数列,当 $n\leqslant7$ 时,$a_n>0$,当 $n\geqslant8$ 时,$a_n<0$,所以当 $n=7$ 时,S_n 取得最大值,故D正确.

10. **答案** BC

命题意图 本题考查椭圆的方程与性质.

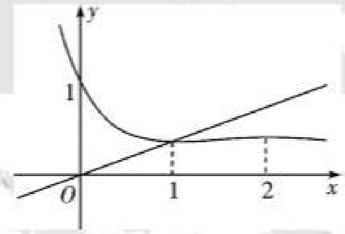
解析 连接 BF_1. 设 $|BF_2|=m$,则 $|AF_2|=3m$,$|AF_1|=2a-3m$,$|BF_1|=2a-m$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AF_1F_2$ 中,$\cos\angle F_1AF_2=\frac{2a-3m}{3m}$,在 $\triangle ABF_1$ 中,利用余弦定理可得 $(2a-m)^2=(4m)^2+(2a-3m)^2-2\times4m\times(2a-3m)\times\frac{2a-3m}{3m}$,化简得 $m=\frac{4}{9}a$,从而 $|AF_1|=2a-3m=\frac{2}{3}a$,又 $|AF_1|=\frac{b^2}{a}$,所以 $\frac{b^2}{a}=\frac{2}{3}a$,$a=\frac{\sqrt{6}}{2}b$,从而椭圆的离心率为 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 设椭圆的半焦距为 $c(c>0)$,则 $c=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,所以 $\triangle BF_1F_2$ 的周长为 $|BF_1|+|BF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}a$. 所以选项B,C正确,A,D错误.

11. **答案** AD

命题意图 本题考查导数的综合应用.

解析 由题可知 $f'(x)=-\frac{(x-1)(x-2)}{e^x}$,当 $x<1$ 或 $x>2$ 时,$f'(x)<0$,当 $1<x<2$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在

$(-\infty,1),(2,+\infty)$上单调递减,在$(1,2)$上单调递增,因此$f(x)$在$x=1$处取得极小值$f(1)=\frac{1}{e}$,在$x=2$处取得极大值$f(2)=\frac{3}{e^2}$,故A正确;因为当x趋向于$-\infty$时,$f(x)$趋向于$+\infty$,当x趋向于$+\infty$时,$f(x)$趋向于0,所以画图(如图所示)可知,当$m=\frac{1}{e}$或$m=\frac{3}{e^2}$时,直线$y=m$与曲线$y=f(x)$有且仅有2个不同的公共点,故B错误;因为$f(0)=1$,当x趋向于$+\infty$时,$f(x)$趋向于0,极小值$f(1)=\frac{1}{e}$,极大值$f(2)=\frac{3}{e^2}$,再根据$f(x)$的图象特征可知仅在$x<0$时,存在唯一的点到直线$y=1$的距离为1,故C错误;因为直线$y=ax$过定点$(0,0)$,且$f(1)=\frac{1}{e}$,所以$a_{\max}=\frac{\frac{1}{e}-0}{1-0}=\frac{1}{e}$,故D正确.



12. 答案 BCD

命题意图 本题考查球与棱锥的性质,以及点的轨迹问题.

解析 由于$\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=0$,所以动点$Q$的轨迹是以线段$MN$为直径的球面,取棱$PA$的中点$E$,连接$BE,ME$,则$ME/\!/BC$,且$ME=\frac{1}{2}BC$,所以$ME/\!/BN$,且$ME=BN$,所以$MN/\!/BE$,且$MN=BE$,所以$MN=BE=\sqrt{3}$,所以动点$Q$的轨迹是半径为$\frac{\sqrt{3}}{2}$的球面,故A错误;连接$PN$,则$MN=PN=\sqrt{3}$,所以$\angle MPN$为锐角,从而点$P$在动点$Q$的轨迹外部,故B正确;易知线段$MN$的中点到平面$ABCD$的距离为正四棱锥高的$\frac{1}{4}$,即为$\frac{\sqrt{2}}{4}$,因为$\frac{\sqrt{2}}{4}<\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以动点$Q$的轨迹被平面$ABCD$所截,得到半径为$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$的圆,故C正确;设动点$Q$所在球的球心为$O$,因为$MN/\!/$平面$PAB$,所以点$O$到平面$PAB$的距离等于点$N$到平面$PAB$的距离,连接$AN$,设点$N$到平面$PAB$的距离为$d$,因为$V_{P-ABN}=V_{N-PAB}$,即$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times\sqrt{2}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\times d$,解得$d=\frac{\sqrt{6}}{3}<\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以动点$Q$的轨迹与平面$PAB$有交点,故D正确.

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 答案 $\frac{\pi}{4}\left(\text{答案不唯一,符合}\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\text{即可}\right)$

命题意图 本题考查三角恒等变换,属于开放性问题.

解析 $\sin x\sin\theta+\cos x\cos\theta=\cos(x-\theta)=\sin\left(x-\theta+\frac{\pi}{2}\right)$,令$\sin\left(x-\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(x+\theta)$,可得$-\theta+\frac{\pi}{2}+2k\pi=\theta,k\in\mathbf{Z}$,所以$\theta=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

14. 答案　$5x+y-1=0$

命题意图　本题考查圆与圆、直线与圆的位置关系，以及直线方程的求解.

解析　设$P(x,y)$，由$|PA|=|PB|$，得$\sqrt{x^2+y^2-2x-3y+3}=\sqrt{x^2+y^2+3x-2y+2}$，化简可得所求轨迹方程为$5x+y-1=0$.

15. 答案　$\frac{2\sqrt{38}}{19}$

命题意图　本题考查棱锥的体积的计算、最值的求法及余弦定理的应用.

解析　四棱锥$P-ABCD$的体积为$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(AD+BC)\cdot AB\cdot PA=\frac{2}{3}\cdot AB\cdot PA$，要使四棱锥$P-ABCD$的体积取得最大值，只需$AB\cdot PA$取得最大值. 由条件可得$PA^2+AB^2=PB^2=18\geqslant 2PA\cdot AB$，即$PA\cdot AB\leqslant 9$，当且仅当$PA=AB=3$时，$PA\cdot AB$取得最大值9，此时计算可得$PC=\sqrt{19}$，$PD=3\sqrt{2}$，$CD=\sqrt{13}$，由余弦定理可得$\cos\angle CPD=\frac{PC^2+PD^2-CD^2}{2\cdot PC\cdot PD}=\frac{2\sqrt{38}}{19}$.

16. 答案　$[-1,+\infty)$

命题意图　本题考查导数的综合应用.

解析　因为$f(x)$在区间$(1,+\infty)$上没有零点，所以$f(x)>0$在区间$(1,+\infty)$上恒成立. 由$f(x)>0$，得$a>\frac{\ln x}{2x}-x$，令$g(x)=\frac{\ln x}{2x}-x$，得$g'(x)=\frac{1-\ln x}{2x^2}-1=\frac{1-\ln x-2x^2}{2x}$，当$x>1$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递减，所以$g(x)<g(1)=-1$，故$a\geqslant -1$，即$a$的取值范围为$[-1,+\infty)$.

四、解答题：共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 命题意图　本题考查正弦定理及余弦定理的应用.

解析　(Ⅰ)由$\sqrt{3}b\tan B=a\cos C+c\cos A$及正弦定理可得$\sqrt{3}\sin B\tan B=\sin A\cos C+\sin C\cos A$，…… (2分)

故$\sqrt{3}\sin B\tan B=\sin(A+C)$，…………………………………… (3分)

而$\sin B=\sin(A+C)>0$，所以$\tan B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

又$B\in(0,\pi)$，所以$B=\frac{\pi}{6}$. …………………………………… (4分)

(Ⅱ)在$\triangle ABC$中，由正弦定理可得$\sin\angle ACB=AB\times\frac{\sin B}{AC}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. …………………… (6分)

因为$AD/\!/BC$，所以$\sin\angle DAC=\frac{\sqrt{7}}{4}$. …………………………………… (7分)

在$\triangle ACD$中，因为$CD<AC$，所以$\angle DAC$为锐角，所以$\cos\angle DAC=\frac{3}{4}$. ……………… (8分)

由余弦定理可得$\cos\angle DAC=\frac{AD^2+1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2AD\times 1}=\frac{3}{4}$，解得$AD=1$或$\frac{1}{2}$. ……………… (10分)

18. 命题意图　本题考查线面垂直的证明及空间向量的应用.

解析　(Ⅰ)因为$PA=CA$，$PB=CB$，AB是公共边，所以$\triangle PAB\cong\triangle CAB$. ……………… (1分)

— 4 —

因为 $PO \perp AB$，所以 $CO \perp AB$，且 $PO = CO$. ……（2 分）

设 $OB = x$，则 $OA = 14 - x$，

所以 $15^2 - (14-x)^2 = 13^2 - x^2$，解得 $x = 5$，

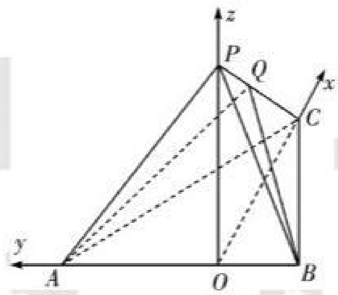
故 $OB = 5, OA = 9, PO = CO = 12$. ……（3 分）

在 $\triangle POC$ 中，因为 $PO^2 + CO^2 = PC^2$，所以 $PO \perp CO$，……（4 分）

又因为 $CO \perp AB, AB \cap PO = O$，

所以 $CO \perp$ 平面 PAB. ……（5 分）

（Ⅱ）如图所示，以 O 为坐标原点，以 OC, OA, OP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$，



则 $O(0,0,0), A(0,9,0), B(0,-5,0), C(12,0,0), P(0,0,12), \overrightarrow{AB} = (0,-14,0)$.

设 $Q(x_0, y_0, z_0)$，则 $\overrightarrow{PQ} = (x_0, y_0, z_0 - 12), \overrightarrow{QC} = (12 - x_0, -y_0, -z_0)$. ……（7 分）

因为 $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{QC}$，所以 $\begin{cases} x_0 = \frac{1}{3}(12 - x_0), \\ y_0 = -\frac{1}{3}y_0, \\ z_0 - 12 = -\frac{1}{3}z_0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_0 = 3, \\ y_0 = 0, \\ z_0 = 9, \end{cases}$

故 $Q(3,0,9), \overrightarrow{QA} = (-3,9,-9)$. ……（8 分）

设平面 QAB 的法向量为 $\boldsymbol{m} = (x_1, y_1, z_1)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{QA} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -14y_1 = 0, \\ -3x_1 + 9y_1 - 9z_1 = 0, \end{cases}$

令 $x_1 = 3$，可得 $\boldsymbol{m} = (3,0,-1)$. ……（10 分）

易知平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = (1,0,0)$. ……（11 分）

因为 $\cos\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \times 1} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$，

所以二面角 $P-AB-Q$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. ……（12 分）

19. **命题意图** 本题考查双曲线的标准方程以及直线与双曲线的位置关系.

解析 （Ⅰ）设双曲线的半焦距为 $c(c>0)$. 由条件知 $\begin{cases} \frac{b}{a} = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ a^2 + b^2 = c^2, \\ c - a = 2 - \sqrt{3}, \end{cases}$ ……（2 分）

解得 $a=\sqrt{3}, b=1$. ……………………………………………………………………………… (3 分)

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$. ……………………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)由 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}-y^2=1,\\ y=x-2,\end{cases}$ 消去 y 整理,得 $2x^2-12x+15=0$,

设 $A(x_1,x_1-2), B(x_2,x_2-2)$,则 $x_1+x_2=6, x_1x_2=\frac{15}{2}$.

不妨设 $x_1>x_2$,计算可得 $x_1=3+\frac{\sqrt{6}}{2}, x_2=3-\frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以 $|AB|=\sqrt{1+1^2}|x_1-x_2|=2\sqrt{3}$. ……………………………………………………… (6 分)

由条件,可知直线 AD 的方程为 $y=-(x-x_1)+x_1-2$,

与双曲线方程 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 联立,消去 y 整理,得 $2x^2-12(x_1-1)x+12x_1^2-24x_1+15=0$.

由根与系数的关系得 $x_D=(x_1+x_D)-x_1=5x_1-6$,同理 $x_C=5x_2-6$. ………………………… (8 分)

所以 $|AD|+|BC|=\sqrt{2}(x_D-x_1)+\sqrt{2}(x_C-x_2)=\sqrt{2}(4x_1-6)+\sqrt{2}(4x_2-6)=4\sqrt{2}(x_1+x_2)-12\sqrt{2}=12\sqrt{2}$.

……………………………………………………………………………………………………… (10 分)

所以四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{|AD|+|BC|}{2}\times|AB|=\frac{12\sqrt{2}}{2}\times 2\sqrt{3}=12\sqrt{6}$. ………………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查数列的通项公式与求和,以及数列不等式的证明.

解析 (Ⅰ)当 $n=1$ 时,$S_1=a_1=4a_1-6$,从而 $a_1=2$, ……………………………………… (1 分)

当 $n=2$ 时,$S_1+S_2=2a_1+a_2=4a_2-8$,从而 $a_2=4$. …………………………………………… (2 分)

当 $n\geqslant 2$ 时,由 $S_1+S_2+\cdots+S_n=4a_n-2n-4$,得 $S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}=4a_{n-1}-2(n-1)-4$,

两式相减得 $S_n=4a_n-4a_{n-1}-2$,从而 $S_{n+1}=4a_{n+1}-4a_n-2$, ………………………………… (3 分)

所以 $a_{n+1}=4a_{n+1}-8a_n+4a_{n-1}$,整理得 $3(a_{n+1}-2a_n)=2(a_n-2a_{n-1})$. …………………… (4 分)

又 $a_2-2a_1=0$,从而 $a_{n+1}-2a_n=0$,即 $a_{n+1}=2a_n$, ……………………………………………… (5 分)

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 2,公比为 2 的等比数列,其通项公式为 $a_n=2^n$. ……………………………… (7 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^n=n$. ……………………………………………………… (8 分)

当 $n=1$ 时,不等式显然成立; ………………………………………………………………………… (9 分)

当 $n\geqslant 2$ 时,$\frac{1}{b_n^2}=\frac{1}{n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$, ………………………………… (10 分)

所以 $\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{b_2^2}+\cdots+\frac{1}{b_n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+2\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$

$$=1+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}\right)<1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}.$$

综上可知,原不等式成立. ……………………………………………………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查二项分布的分布列和期望,以及概率的计算.

解析 (Ⅰ)由题意可知 $X\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$, ……………………………………………………… (1 分)

— 6 —

$P(X=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，$P(X=1)=C_3^1\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$，

$P(X=2)=C_3^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$，$P(X=3)=C_3^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$. …………………………（3 分）

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

……………………………………………………………………………………（4 分）

$E(X)=3\times\frac{2}{3}=2$. ……………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）设 $A=$"甲获得冠军"，$B=$"乙获得冠军"，"甲胜乙、丙、丁"分别记为事件 A_1,A_2,A_3，"乙胜丙、丁"分别记为事件 B_1,B_2，"丙胜丁"记为事件 C.

由题意，$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{2}{3}$，$P(B_1)=P(B_2)=\frac{3}{5}$，$P(C)=\frac{1}{2}$，

则 $P(A)=P(A_1A_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)[1-P(B_1B_2)]+P(A_1\bar{A}_2A_3)[1-P(B_1C)]+P(A_1A_2\bar{A}_3)[1-P(B_2C)]$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^3+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{424}{675}$，……………………………………………………………………（8 分）

$P(AB)=P(\bar{A}_1A_2A_3)[P(\bar{B}_1B_2)+P(B_1\bar{B}_2)]+P(A_1\bar{A}_2A_3)P(B_1B_2)+P(A_1A_2\bar{A}_3)P(B_1B_2)$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times2+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times2=\frac{8}{45}$. ……………………（10 分）

所以在甲获得冠军的条件下，乙也获得冠军的概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{15}{53}$. ……………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查导数的综合应用.

解析 （Ⅰ）由题可知 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)-\frac{a}{x+1}$，……………（1 分）

$\because x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点，$\therefore f'(0)=1-a=0$，

解得 $a=1$. ……………………………………………………………………（2 分）

当 $a=1$ 时，$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)-\frac{1}{x+1}$，

设 $g(x)=e^x(\sin x+\cos x)-\frac{1}{x+1}$，则 $g'(x)=2e^x\cos x+\frac{1}{(x+1)^2}$，

当 $x\in(-1,1)$ 时，$g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 单调递增，……………………………（3 分）

又 $g(0)=0$，$\therefore$ 当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

$\therefore x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点，$\therefore a=1$. ……………………………………（4 分）

（Ⅱ）若 $a\leqslant0$，当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)=e^x\sin x-a\ln(x+1)<0$，

$\therefore f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上无零点，不符合题意. ……………………………（5 分）

若 $a>0$，$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)-\dfrac{a}{x+1}$，

设 $h(x)=e^x(\sin x+\cos x)-\dfrac{a}{x+1}$，

则 $h'(x)=2e^x\cos x+\dfrac{a}{(x+1)^2}$. ……（6 分）

当 $x\in(-1,0)$ 时，$h'(x)>0$，$\therefore h(x)$ 即 $f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，$\therefore f'(x)<f'(0)=1-a$.

若 $a\geqslant 1$，则 $f'(x)<f'(0)=1-a\leqslant 0$，$\therefore f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，$\therefore f(x)>f(0)=0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上无零点，不符合题意. ……（7 分）

若 $0<a<1$，当 $x\in(-1,0)$ 时，$h(0)=f'(0)=1-a>0$，又当 x 趋向于 -1 时，$h(x)$ 趋向于 $-\infty$，$\therefore$ 存在 $x_1\in(-1,0)$，使得 $h(x_1)=f'(x_1)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(-1,x_1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(x_1,0)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

$\because$ 当 $x\to -1$ 时，$f(x)\to+\infty$，$f(0)=0$，$\therefore f(x_1)<0$，故 $f(x)$ 在区间 $(-1,x_1)$ 上存在一个零点. ……（9 分）

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$ 时，设 $m(x)=h'(x)$，

则 $m'(x)=2e^x\cos x-2e^x\sin x-\dfrac{2a}{(x+1)^3}=2e^x(\cos x-\sin x)-\dfrac{2a}{(x+1)^3}<0$，

$\therefore h'(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$ 上单调递减，

又 $h'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)>0$，$h'(\pi)=-2e^\pi+\dfrac{a}{(\pi+1)^2}<-2e^\pi+\dfrac{1}{(\pi+1)^2}<0$，

$\therefore$ 存在 $x_2\in\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$，使得 $h'(x_2)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},x_2\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_2,\pi)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，……（10 分）

$\because h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}-\dfrac{a}{\frac{\pi}{4}+1}>0$，$h(\pi)=-e^\pi-\dfrac{a}{\pi+1}<0$，

$\therefore$ 存在 $x_3\in(x_2,\pi)$，使得 $h(x_3)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},x_3\right)$ 时，$h(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_3,\pi)$ 时，$h(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$\because f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}-a\ln\left(\dfrac{\pi}{4}+1\right)>\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}-\ln\left(\dfrac{\pi}{4}+1\right)>\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}-1>0$，$f(\pi)=-a\ln(\pi+1)<0$，

$\therefore$ 存在 $x_4\in(x_3,\pi)$，使得 $f(x_4)=0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$ 上存在一个零点. ……（11 分）

综上所述，a 的取值范围是 $(0,1)$. ……（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。