2024届高三年级12月份
数学学科测试试卷

2023.12

注意事项及说明：本卷考试时间为120分钟，全卷满分为150分.

一、 选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上.

1．设集合$U=\mathbf{R}$，集合$M=\{x|-2<x<3\}$，$N=\{x|x<0\}$，则$\complement_U(M\cup N)=$ （ ▲ ）

A．$\{x|-2<x<0\}$　　B．$\{x|x\geqslant 3\}$　　C．$\{x|x\leqslant -2\}$　　D．$\{x|0\leqslant x<3\}$

2．在复平面内，O为原点，i为虚数单位，复数z对应的向量$\overrightarrow{OZ}=(1,2)$，则$|z-i|=$ （ ▲ ）

A．3　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{2}$

3．已知函数$f(x)=\log_2[(x-a)(4-x)]$在$(3,4)$上单调递减，则a的取值范围是 （ ▲ ）

A．$(-\infty,2)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(-\infty,2]$　　D．$[2,+\infty)$

4．已知平面向量$\vec{a}=(1,\sqrt{3})$，$\vec{a}\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=2$，则$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量为 （ ▲ ）

A．$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　B．$\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$　　C．$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　D．$\left(-\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

5．《*Rhind Papyrus*》是世界上最古老的数学著作之一．书中有一个类似这样的问题，请给出答案：把200个面包分给5个人，使每人所得面包个数成等差数列，且使较大的三份之和的$\frac{1}{7}$是较小的两份之和，则最小的一份为 （ ▲ ）

A．$\frac{5}{3}$　　B．$\frac{10}{3}$　　C．$\frac{5}{6}$　　D．$\frac{13}{6}$

6．若直线l过抛物线$x^2=8y$的焦点，与抛物线交于A,B两点，且线段AB中点的横坐标为4，则$AB=$（ ▲ ）

A．12　　B．14　　C．16　　D．18

7．已知圆O：$x^2+y^2=r^2$，点$P(a,b)(ab\neq 0)$是圆O内一点，过点P的圆O的最短弦所在直线为l_1，直线l_2的方程为$ax+by-r^2=0$，则 （ ▲ ）

A．$l_1/\!/l_2$，且l_2与圆O相离　　B．$l_1\perp l_2$，且l_2与圆O相切

C．$l_1/\!/l_2$，且l_2与圆O相交　　D．$l_1\perp l_2$，且l_2与圆O相离

8．已知$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$2\tan\beta=\tan 2\alpha$，$\tan(\beta-\alpha)=-8$，则$\sin\alpha=$ （ ▲ ）

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分，请把答案填涂在答题卡相应位置上.

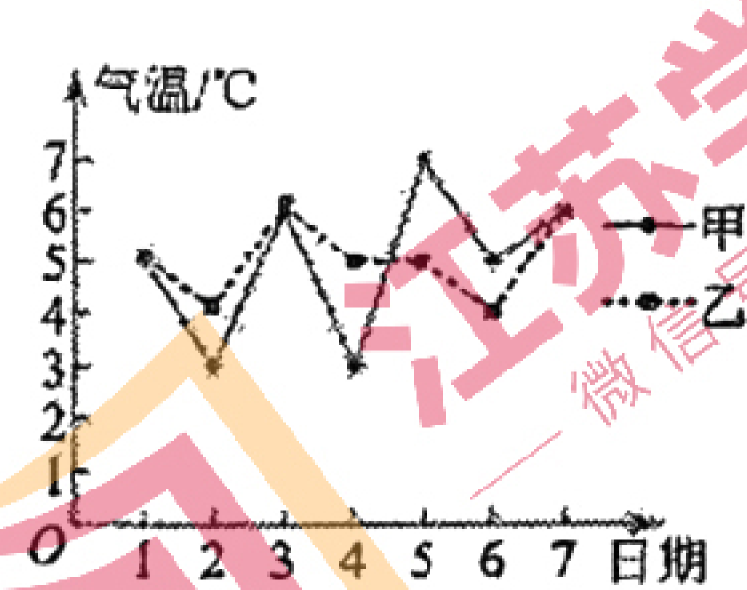
9. 甲、乙两地12月初连续7天的日最高气温数据如图所示，则关于这7天，以下判断正确的是（ ▲ ）

A. 甲地日最高气温的平均数为5℃

B. 甲地日最高气温的极差为3℃

C. 乙地日最高气温的众数为6℃

D. 乙地日最高气温的中位数为5℃



10. 已知x,y为正实数，$x+y=2$，则（ ▲ ）

A. xy的最大值为1

B. $\frac{y}{x}+\frac{2}{y}$的最小值3

C. $\frac{x^2}{x+1}+\frac{y^2}{y+2}$的最小值为$\frac{5}{6}$

D. $(x^2+\frac{1}{5})(y^2+\frac{1}{5})$的最小值为$\frac{4}{5}$

11. 在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E,F分别是AB,BC的中点，P,Q是线段A_1C_1上的两个动点，且$PQ=1$，以A为顶点的三条棱长都是1，$\angle A_1AD=\angle A_1AB=\angle BAD=60^\circ$，则（ ▲ ）

A. EF // 平面A_1C_1D

B. $AC_1=\sqrt{5}$

C. 三棱锥$B-PQE$的体积是定值

D. 三棱锥A_1-ABD的外接球的表面积是$\frac{3\pi}{2}$

12. 定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足如下条件：①$f(xy)=x^2f(y)+y^2f(x)$；②当$x>1$时，$f(x)>0$，则（ ▲ ）

A. $f(1)=0$

B. $f(x)$在$(1,+\infty)$上是增函数

C. $f(x)$是周期函数

D. $f(x)+f(\frac{1}{x})\geq 0$

三、 填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．请把答案填写在答题卡相应位置上．

13. “北依长江，南临太湖．江苏之南，明珠无锡．总要来趟无锡吧”！某游客从鼋头渚、梅园、蠡园、锡惠公园、灵山胜境、拈花湾六个景点中任选三个进行游览，则他选中鼋头渚的概率为___▲___．

14. 若某圆锥高为4，其侧面积与底面积之比为3:1，则该圆锥的体积为___▲___．

15. 已知函数$f(x)=a\sin x+b\cos x$图象上有一最低点$\left(\frac{11\pi}{6},-2\right)$，将此函数的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度得$y=g(x)$的图象，若函数$g(x)$的图象在$x=x_0\left(\frac{3\pi}{2}<x_0<2\pi\right)$处的切线与$g(x)$的图象恰好有三个公共点，则$\tan x_0-x_0$的值是___▲___．

16. 已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_1$的直线$l$与圆$x^2+y^2=a^2$相切于点$T$，且直线$l$与双曲线$C$的右支交于点$P$，若$\overrightarrow{F_1T}=\frac{1}{2}\overrightarrow{TP}$，则双曲线$C$的离心率为___▲___．

四、 解答题：本题共 6 小题，共 70 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本题满分 10 分）

设$\triangle ABC$内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$a\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin A$．

（1）求B；

（2）若$c=\sqrt{3}$，且$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求角B的角平分线的长．

18．（本题满分 12 分）

某大型公司招聘新员工，应聘人员简历符合要求之后进入考试环节．考试分为笔试和面试，只有笔试成绩高于 75 分的考生才能进入面试环节．已知 2023 年共有 1000 人参加该公司的笔试，笔试成绩$X\sim N(70,25)$．

（1）从参加笔试的 1000 名考生中随机抽取 4 人，求这 4 人中至少有一人进入面试的概率；

（2）甲、乙、丙三名应聘人员进入面试环节，且他们通过面试的概率分别为$\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{4}$．设这三名应聘人员中通过面试的人数为$Y$，求随机变量$Y$的分布列和数学期望$E(Y)$．

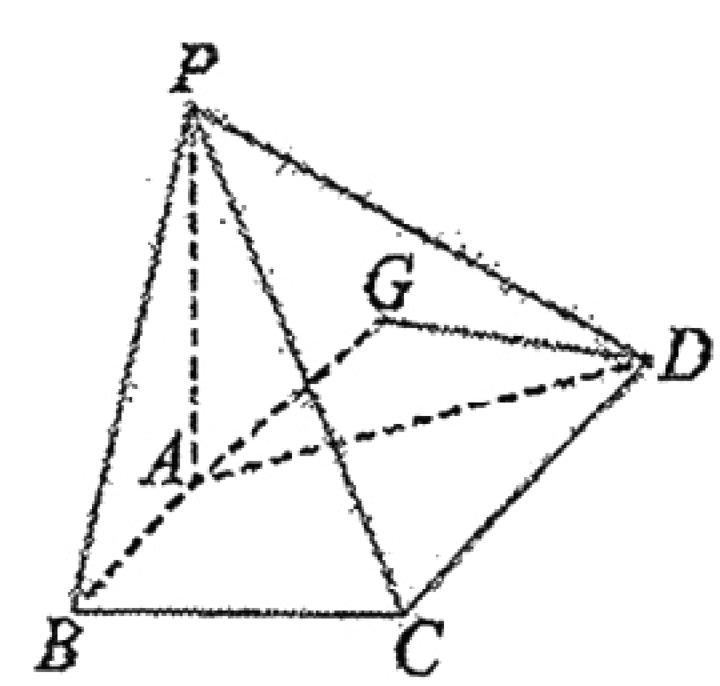
（参考数据：若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)\approx0.6827$，$P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)\approx0.9545$，$P(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)\approx0.9973$，$0.84135^4\approx0.501$，$0.9545^4\approx0.830$．）

19．（本题满分 12 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，$AB//CD$，$AB\perp BC$，$AB=BC=1$，$CD=2$，点G是$\triangle PCD$的重心．

（1）求证：平面$PAB\perp$平面PBC；

（2）若直线DG与平面PBC所成角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，求PA的长度．



20.（本题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1$，且满足$a_{n+1}a_n=2^{n+1}$，记$b_n=a_{2n-1}+a_{2n}$，$n\in N^*$.

（1）证明：$\{b_n\}$是等比数列；

（2）记$c_n=\dfrac{b_n}{(b_{n+1}-3)(b_n-3)}$，证明：数列$\{c_n\}$的前$n$项和$S_n<\dfrac{1}{2}$.

21.（本题满分 12 分）

将圆$x^2+y^2=1$上各点的横坐标变为原来的 5 倍，纵坐标变为原来的 4 倍，所得的曲线为C. 记曲线C与x轴负半轴和y轴正半轴分别交于A、B两点，$M(t,0)$（$-4\leqslant t\leqslant -1$）为$x$轴上一点.

（1）求曲线C的方程；

（2）连接BM交曲线C于点D，过点D作x轴的垂线交曲线C于另一点E. 记$\triangle AEM$的面积为S_1，记$\triangle AEB$的面积为S_2，求$\dfrac{S_1}{S_2}$的取值范围.

22.（本题满分 12 分）

已知函数$f(x)=\ln x$.

（1）求函数$h(x)=f(x)+|x-a|$（其中$a>0$）的单调区间；

（2）若不等式$(x^2-1)f(x)\geq k(x-1)^2$对一切正实数x恒成立，求实数k的取值范围.