



2024 届高三 11 月模拟测试数学试题

总分: 150 分 考试时间: 120 分钟

一、单项选择题: 共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。

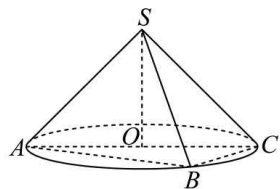
- 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, $B = \{x | 2x + 3 > 0\}$, 则 $A \cup B =$ ()
 A. $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$ B. $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$
 C. $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ D. $(-2, +\infty)$
- 若复数 $(a+i)(1-i) = -2$, $a \in \mathbb{R}$, 则 $a =$ ()
 A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
- 已知 α 为锐角, $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin\alpha =$ ()
 A. $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$ B. $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$ C. $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ D. $-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$
- 已知 $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 1$ ($n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}^*$), S_n 为其前 n 项和, 则 $S_{10} =$ ()
 A. $2^{10} - 31$ B. $4^{10} - 31$ C. $2^{10} - 30$ D. $4^{10} - 30$
- 2023 年的五一劳动节是疫情后的第一个小长假, 公司筹备优秀员工假期免费旅游. 除常见的五个旅游热门地北京、上海、广州、深圳、成都外, 淄博烧烤火爆全国, 则甲、乙、丙、丁四个部门至少有三个部门所选旅游地全不相同的方法种数共有 ()
 A. 1800 B. 1080 C. 720 D. 360
- 对于两个函数 $h(t) = e^{t-1}\left(t > \frac{1}{2}\right)$ 与 $g(t) = \ln(2t-1) + 2\left(t > \frac{1}{2}\right)$, 若这两个函数值相等时对应的自变量分别为 t_1, t_2 , 则 $t_1 - t_2$ 的最小值为 ()
 A. -1 B. $-\ln 2$ C. $1 - \ln 3$ D. $1 - 2\ln 2$
- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F , 关于原点对称的两点 A, B 分别在双曲线的左、右两支上, $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$, $3\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{FC}$, 且点 C 在双曲线上, 则双曲线的离心率为 ()
 A. $\frac{\sqrt{10}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- 已知曲线 $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 9$ 与曲线 $y = \frac{1-2x}{x+1}$ 交于点 $A(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \dots, A_k(x_k, y_k)$, 则 $\sum_{i=1}^k (x_i + y_i) =$ ()
 A. -16 B. -12 C. -9 D. -6

二、多项选择题: 共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

- 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 把 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 ()
 A. $g(x)$ 是奇函数
 B. $g(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{4}$ 对称
 C. $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增
 D. 不等式 $g(x) \leq 0$ 的解集为 $\left[k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \pi\right], k \in \mathbb{Z}$
- 袋子中有 6 个相同的球, 分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 从中有放回的随机取 5 次, 每次取一个球, 记录每次取到的数字, 统计后发现这 5 个数字的平均数为 2, 方差小于 1, 则 ()

- A. 可能取到数字 4
B. 中位数可能是 2
C. 极差可能是 4
D. 众数可能是 2

11. 如图, 圆锥 SO 的底面圆 O 的直径 $AC = 4$, 母线长为 $2\sqrt{2}$, 点 B 是圆 O 上异于 A, C 的动点, 则下列结论正确的是 ()



- A. SC 与底面所成角为 45°
B. 圆锥 SO 的表面积为 $4\sqrt{2}\pi$
C. $\angle SAB$ 的取值范围是 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$
D. 若点 B 为弧 AC 的中点, 则二面角 $S-BC-O$ 的平面角大小为 45°

12. 曲线 C 是平面内与两个定点 $F_1(0,1)$, $F_2(0,-1)$ 的距离的积等于 $\frac{3}{2}$ 的点 P 的轨迹, 则下列结论正确的是 ()

- A. 曲线 C 关于坐标轴对称
B. 点 P 到原点距离的最大值为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$
C. $\triangle F_1PF_2$ 周长的最大值为 $2+\sqrt{6}$
D. 点 P 到 y 轴距离的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

三、填空题: 共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若 $\sin\left(\alpha - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值为_____

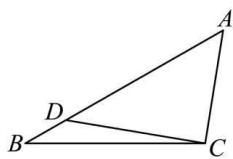
14. 二项式 $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式的常数项为_____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, 对任意正整数 k , a_{2k-1} , a_{2k} , a_{2k+1} 成等差数列, 公差为 $2k$, 则 $a_{100} =$ _____.

16. 设 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} |x-1|, & x \geq 0 \\ -x^2 + 2ax, & x < 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(f(x))$ 恰有 3 个零点, 则实数 a 的取值范围为_____.

四、解答题: 共 70 分。

17. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a = b(\sqrt{3}\sin C + \cos C)$.



(1) 求 B ;

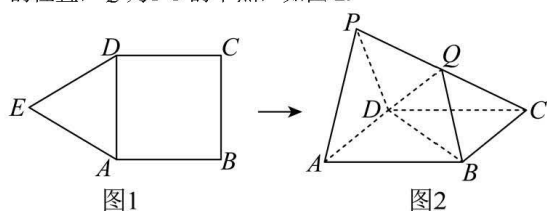
(2) 已知 $BC = 2\sqrt{3}$, D 为边 AB 上的一点, 若 $BD = 1$, $\angle ACD = \frac{\pi}{2}$, 求 AC 的长.

18. (12分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 前 n 项和为 S_n , 若 $a_{n+1} + a_{n+2} = 12a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $S_5 = 121$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = a_n + \ln a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12分) 图1是由正方形 $ABCD$ 和正三角形 ADE 组成的一个平面图形, 将 $\triangle ADE$ 沿 AD 折起, 使点 E 到达点 P 的位置, Q 为 PC 的中点, 如图2.



(1) 求证: $AP \parallel$ 平面 QBD ;

(2) 若平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 求平面 PAD 与平面 QBD 夹角的余弦值.

20. (12分) 某校20名学生的数学成绩 x_i ($i=1, 2, \dots, 20$)和知识竞赛成绩 y_i ($i=1, 2, \dots, 20$)如下表:

学生编号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数学成绩 x_i	100	99	96	93	90	88	85	83	80	77
知识竞赛成绩 y_i	290	160	220	200	65	70	90	100	60	270
学生编号 i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
数学成绩 x_i	75	74	72	70	68	66	60	50	39	35
知识竞赛成绩 y_i	45	35	40	50	25	30	20	15	10	5

计算可得数学成绩的平均值是 $\bar{x} = 75$, 知识竞赛成绩的平均值是 $\bar{y} = 90$, 并且 $\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 6464$,

$\sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2 = 149450$, $\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 21650$.

(1) 求这组学生的数学成绩和知识竞赛成绩的样本相关系数 (精确到 0.01);

(2) 设 $N \in \mathbf{N}^*$, 变量 x 和变量 y 的一组样本数据为 $\{(x_i, y_i) | i=1, 2, \dots, N\}$, 其中 $x_i (i=1, 2, \dots, N)$ 两两不相同,

$y_i (i=1, 2, \dots, N)$ 两两不相同. 记 x_i 在 $\{x_n | n=1, 2, \dots, N\}$ 中的排名是第 R_i 位, y_i 在 $\{y_n | n=1, 2, \dots, N\}$ 中的排名是第 S_i 位, $i=1, 2, \dots, N$. 定义变量 x 和变量 y 的“斯皮尔曼相关系数” (记为 ρ) 为变量 x 的排名和变量 y 的排名的样本相关系数.

(i) 记 $d_i = R_i - S_i, i=1, 2, \dots, N$. 证明: $\rho = 1 - \frac{6}{N(N^2-1)} \sum_{i=1}^N d_i^2$;

(ii) 用 (i) 的公式求得这组学生的数学成绩和知识竞赛成绩的“斯皮尔曼相关系数”约为 0.91, 简述“斯皮尔曼相关系数”在分析线性相关性时的优势.

注: 参考公式与参考数据.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}; \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sqrt{6464 \times 149450} \approx 31000.$$

21. (12 分) 动点 P 与定点 $F(\sqrt{3}, 0)$ 的距离和它到直线 $l: x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 的距离的比是常数 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 记点 P 的轨迹为 E .

(1) 求 E 的方程;

(2) 已知 $M(0, 1)$, 过点 $N(-2, 1)$ 的直线与曲线 E 交于不同的两点 A, B , 点 A 在第二象限, 点 B 在 x 轴的下方, 直线 MA, MB 分别与 x 轴交于 C, D 两点, 求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = 2\ln x - ax + 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数;

(2) 已知函数 $g(x) = e^{ax} - ex^2 (a \in \mathbf{R})$, 当 $0 < a < \frac{2\sqrt{e}}{e}$ 时, 关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 有两个实根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 求证:

$$x_1 - \sqrt{e} < \frac{1}{x_2} - \frac{1}{\sqrt{e}}. \quad (\text{注: } e = 2.71828 \dots \text{ 是自然对数的底数})$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线