



5. 为庆祝我国第 39 个教师节,某校举办教师联谊会,甲、乙两名数学老师组成“几何队”参加“成语猜猜猜”比赛,每轮比赛由甲、乙两人各猜一个成语,已知甲每轮猜对的概率为  $\frac{4}{5}$ ,乙每轮猜对的概率为  $\frac{3}{4}$ . 在每轮比赛中,甲和乙猜对与否互不影响,则“几何队”在一轮比赛中至少猜对一个成语的概率为

- A.  $\frac{3}{5}$                       B.  $\frac{19}{20}$                       C.  $\frac{7}{20}$                       D.  $\frac{1}{20}$

6. 已知函数  $f(x) = (x^2 - x - 1)e^x$  ( $e$  为自然对数的底数),则函数  $f(x)$  的极小值为

- A.  $\frac{1}{e}$                       B.  $e$                       C.  $e^2$                       D. 1

7. 在  $\triangle ABC$  中,点  $M$  在平面  $ABC$  内,且满足  $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{BA} + \mu \overrightarrow{BC}$  ( $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ),命题  $P: \overrightarrow{AM} = 2 \overrightarrow{MC}$ ,命题  $Q: \mu - \lambda = \frac{1}{3}$ ,则  $P$  是  $Q$  的

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分又不必要条件

8. 十九世纪下半叶集合论的创立,奠定了现代数学的基础,著名的“康托三分集”是数学理性思维的构造产物,具有典型的分形特征.其操作过程如下:将闭区间  $[0, 1]$  均分为三段,去掉中间的区间段  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ,记为第 1 次操作;再将剩下的两个区间  $[0, \frac{1}{3}]$ ,  $[\frac{2}{3}, 1]$  分别均分为三段,并各自去掉中间的区间段;记为第 2 次操作;...;每次操作都在上一次操作的基础上,将剩下的各个区间分别均分为三段,同样各自去掉中间的区间段;操作过程不断地进行下去,剩下的区间集合即是“康托三分集”. 设第  $n$  次操作去掉的区间长度为  $a_n$ ,数列  $\{b_n\}$  满足:  $b_n = n^2 a_n$ ,则数列  $\{b_n\}$  中的取值最大的项为

- A. 第 3 项                      B. 第 4 项  
C. 第 5 项                      D. 第 6 项

二、选择题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.)

9. 下列说法正确的是

- A. 若  $a > b > 0$ , 则  $a - c > b - c$                       B. 若  $a > b > 0$ , 则  $a|c| > b|c|$   
C. 若  $a > b > 0$ , 则  $\frac{b}{a} \leq \frac{b+c^2}{a+c^2}$                       D. 若  $a < b < 0$ , 则  $a^2 < b^2$

10. 设  $(3x-2)(1+x)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_7x^7$ , 则下列结论正确的是

- A.  $a_0 = -2$   
B.  $a_3 = 85$   
C.  $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 32$   
D.  $a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + 2^3a_3 + \dots + 2^7a_7 = 2916$

11. 已知平面向量  $a, b, c$  满足:  $|b|=2|a|=4$ , 且  $a \perp (a-b)$ ,  $|c-b|=\sqrt{3}$ , 则下列结论正确的是

- A. 与向量  $a$  共线的单位向量为  $\frac{1}{4}a$       B. 平面向量  $a, b$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$   
 C.  $|a-b|=2\sqrt{3}$       D.  $|c-a|$  的取值范围是  $[\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$

12. 已知函数  $f(x)$  及其导函数  $f'(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 若  $f'(2)=8$ , 函数  $f(2x+1)$  和  $f'(x+2)$  均为偶函数, 则

- A. 函数  $f'(x)$  的图象关于点  $(1, 0)$  对称      B. 函数  $f'(x)$  是周期为 4 的周期函数  
 C. 函数  $f(x)$  的图象关于点  $(3, 0)$  对称      D.  $\sum_{i=1}^{2023} f'(i)=8$

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 已知  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 且  $\sin 2\alpha - \sqrt{3} \sin \alpha = 0$ , 则  $\alpha =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知  $a > 0, b > 0$ , 且  $2a + b - ab = 0$ , 则  $2a + b$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

15. 国庆节期间, 四位游客自驾游来到张家界, 入住某民宿, 该民宿老板随机将标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 的 7 张门卡中的 4 张分给这四位游客, 每人发一张, 则至多有一位游客拿到的门卡标有偶数数字的分配方案一共有 \_\_\_\_\_ 种. (用数字作答)

16. 已知正实数  $a, b$  满足:  $3^a = 2^{2b} + \log_3 \frac{b}{a}$ , 则  $a$  与  $3b$  大小关系为 \_\_\_\_\_.

四、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 10 分)

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ , 已知  $\sin A - 2\sin^2 \frac{A}{2} = \sqrt{2} - 1$ .

(1) 求角  $A$  的大小;

(2) 已知  $b=3$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $\theta$ , 求边  $a$  的大小.

8. (本小题满分 12 分)

2023 年实行新课标新高考改革的省市共有 29 个, 选科分类是高级中学在校学生生涯规划的重要课题, 某高级中学为了解学生选科分类是否与性别有关, 在该校随机抽取 100 名学生进行调查. 统计整理数据得到如下的  $2 \times 2$  列联表:

	选物理类	选历史类	合计
男生	35	15	
女生	25	25	
合计			100

- (1) 依据小概率值  $\alpha=0.05$  的独立性检验, 能否据此推断选科分类与性别有关联?
- (2) 在以上随机抽取的女生中, 按不同选择类别同比例分层抽样, 共抽取 6 名女生进行问卷调查, 然后在被抽取的 6 名女生中再随机抽取 4 名女生进行面对面访谈. 设面对面访谈的女生中选择历史类的人数为随机变量  $X$ , 求随机变量  $X$  的分布列和数学期望.

附:  $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ , 其中  $n=a+b+c+d$ .

$\alpha$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
$\chi^2_{\alpha}$	1.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (本小题满分 12 分)

设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $S_n = n^2$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

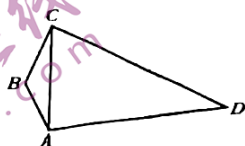
(2) 若数列  $\{b_n\}$  满足:  $b_2 = 2b_1$ ,  $b_n \neq 0$ , 且  $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$  ( $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$ ), 设  $c_n = a_n + (-1)^n b_n$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在平面四边形  $ABCD$  中,  $BC \perp CD$ ,  $AB = BC = 2$ ,  $\angle ABC = \theta$ ,  $120^\circ \leq \theta < 180^\circ$ .

(1) 若  $\theta = 120^\circ$ ,  $AD = 6$ , 求  $\angle ADC$  的大小;

(2) 若  $2CD \cdot \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{3}AC$ , 求四边形  $ABCD$  面积的最大值.



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线