石家庄市2024届高中毕业年级教学质量摸底检测

（数学答案）

（一、二）选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	A	C	B	C	D	A	D	ABD	BD	BCD	AC

（三）填空题

13. -160　　14. $2-\sqrt{3}$

15. 18　　16. $\dfrac{x^2}{1225}-\dfrac{y^2}{144}=1$，$y^2=292(x+36)$

（四）解答题（阅卷过程中发现的其他解法参照本答案的评分细则，教研组研讨决定）

17. 【解析】(1)设等差数列的公差为d，

由$\begin{cases}a_3=5\\S_8=64\end{cases}$，可得$\begin{cases}a_1+2d=5\\8a_1+\dfrac{8\times7}{2}d=64\end{cases}$ ……………………2分

解得$\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$， ……………………4分

所以$a_n=2n-1$， ……………………5分

(2)因为$\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$，

所以$T_n=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$ ……………………7分

$=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2n+1})$ ……………………9分

因为$n\in N^*$，所以$\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2n+1})<\dfrac{1}{2}$，即$T_n<\dfrac{1}{2}$ ……………………10分

18. 【解析】(1)由余弦定理可得：

$AC^2=b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=16+12-2\times4\times2\sqrt{3}\times\cos150^\circ=52$，

则$AC=2\sqrt{13}$， ……………………2分

又因为$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，即$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{13}}{\sin150^\circ}$ ……………………4分

所以$\sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{39}}{26}$. ……………………………………………………5 分

（2）因为$\sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{39}}{26}$，所以$\cos\angle BAC=\dfrac{7\sqrt{13}}{26}$，

从而$\tan\angle BAC=\dfrac{\sqrt{3}}{7}$， ……………………………………………………7 分

在$Rt\Delta ABD$中，$BD=AB\cdot\tan\angle BAC=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{7}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$ ……………………………………………………9 分

$\therefore S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{2}BD\cdot BC\cdot\sin\angle DBC=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………………………………………11 分

$\therefore S_{\Delta BCD}=\dfrac{6\sqrt{3}}{7}$ ……………………………………………………12 分

19.【解析】(1) 因为$PC\perp$平面ABC，$AC\subset$平面ABC，所以$PC\perp AC$，又$PC=4$，$PA=2\sqrt{6}$，

所以$AC=2\sqrt{2}$. ……………………………………………………2 分

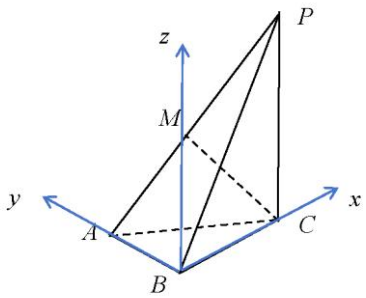
在ΔABC中，因为$AB=BC=2$，所以$AB^2+BC^2=AC^2$，所以$AB\perp BC$

因为$PC\perp$平面ABC，$AB\subset$平面ABC，所以$PC\perp AB$， ……………………………………4 分

又因为$PC\cap BC=C$，

所以$AB\perp$平面PBC. ……………………………………………………5 分

(2)(方法一)由(1)知$AB\perp BC$，以B为坐标原点，BC,BA所在直线分别为x,y轴，过点B且与平面ABC垂直的直线为z轴，建立空间直角坐标系，如图所示.



则 $B(0,0,0), A(0,2,0), P(2,0,4), C(2,0,0)$，$M(1,1,2)$，

所以 $\overrightarrow{CM}=(-1,1,2)$，$\overrightarrow{BA}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BP}=(2,0,4)$ ……………………………… 6 分

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2y=0\\ 2x+4z=0\end{cases}$，

令 $x=2$，则 $z=-1$，所以 $\vec{n}=(2,0,-1)$， ……………………………… 8 分

设 CM 与平面 PAB 所成角为 θ，

则 $\cos\langle\overrightarrow{CM},\vec{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{CM}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CM}||\vec{n}|}=\dfrac{-2-2}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\dfrac{-2\sqrt{30}}{15}$， ……………………………… 10 分

$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CM},\vec{n}\rangle|=\dfrac{2\sqrt{30}}{15}$，$\therefore\cos\theta=\dfrac{\sqrt{105}}{15}$

即 CM 与平面 PAB 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{105}}{15}$． ……………………………… 12 分

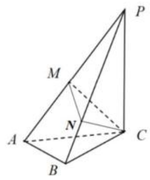
（2）（方法二）过点 C 作 $CN\perp PB$，垂足为 N，连接 MN， ……………………………… 6 分

由（1）知 $AB\perp$ 平面 PBC，$\because AB\subset$ 平面 PAB，$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PBC，

$\because$ 平面 $PAB\cap$ 平面 $PBC=PB$，$CN\subset$ 平面 PBC，$CN\perp PB$，

$\therefore CN\perp$ 平面 PAB，

$\therefore\angle CMN$ 为 CM 与平面 PAB 所成角， ……………………………… 8 分



在 $Rt\Delta PAC$ 中，$CM=\dfrac{1}{2}PA=\sqrt{6}$，

在 $Rt\Delta PBC$ 中，$CN=\dfrac{PC\times BC}{PB}=\dfrac{4\times 2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$， ……………………………… 10 分

$\therefore$ 在 $Rt\Delta CMN$ 中，$MN=\sqrt{CM^2-CN^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{70}}{5}$，

故 $\cos\angle CMN=\dfrac{MN}{CM}=\dfrac{\sqrt{105}}{15}$，

即 CM 与平面 PAB 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{105}}{15}$． ……………………………… 12 分

20.【解析】（1）设 A＝“张某选择甲类问题”，B＝“张某答对所选问题”，

M ＝“张某至少答对一道问题”，

则 $\overline{A}$ =“张某选择乙类问题”，$\overline{B}$ =“张某未答对所选问题”

$\overline{M}$ =“张某一道问题都没答对”. ………………………………………………1 分

由题意得，$P(A)=P(\bar{A})=0.5$，

$P(B|A)=0.9$， $P(\overline{B}|A)=0.1$ ， $P(B|\overline{A})=0.7$， $P(\overline{B}|\overline{A})=0.3$， ………………………2 分

由全概率公式，得

$P(\overline{M})=P(A)P(\overline{B}|A)+P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})=0.5\times0.1+0.5\times0.3=0.2$ ………………………4 分

$\therefore P(M)=1-P(\overline{M})=1-0.2=0.8$. ………………………………………………5 分

（2）根据条件可知：若张某先回答甲类问题，

则张某的累计得分X的可能值为0，30，80， ………………………………………… 6 分

∵张某能正确回答甲类问题的概率为0.9，能正确回答乙类问题的概率为0.7，

$\therefore P(X=0)=1-0.9=0.1$；$P(X=30)=0.9\times(1-0.7)=0.27$；$P(X=80)=0.9\times0.7=0.63$，

则X的分布列为

X	0	30	80
P	0.1	0.27	0.63

当张某先回答甲类问题时，累计得分的期望为

$E(X)=0\times0.1+30\times0.27+80\times0.63=58.5$， ………………………………… 8 分

若张某先回答乙类问题，则张某的累计得分Y的可能值为0，50，80， ……………………9 分

同理可求$P(Y=0)=1-0.7=0.3$；$P(Y=50)=0.7\times(1-0.9)=0.07$；$P(Y=80)=0.7\times0.9=0.63$，

则此时累计得分的期望为$E(Y)=0\times0.3+50\times0.07+80\times0.63=53.9$ ……………………11 分

因为$E(X)>E(Y)$，

所以，以累计得分多为决策依据，张某应选择先回答甲类问题. …………………………12 分

21.【解析】(1)设E的方程为$mx^2+ny^2=1(m>0,n>0)$， ………………………………1 分

代入$A\left(\frac{3}{2},-1\right)$和$B(0,2)$两点得$m=\frac{1}{3},n=\frac{1}{4}$， ……………………………2 分

所以E的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………………4 分

（2）设过点 C 的直线方程为 $y=kx-4$，

$\begin{cases} y=kx-4 \\ \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 消去 y 得 $\left(3k^2+4\right)x^2-24kx+36=0$，

$\Delta=(24k)^2-4\times36\times\left(3k^2+4\right)=144\left(k^2-4\right)>0$，解得 $k>2$ 或 $k<-2$，……5 分

设 $M(x_1,y_1)$ $N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{24k}{3k^2+4}$，$x_1x_2=\dfrac{36}{3k^2+4}$ ……6 分

设过点 M 且斜率为-2 的直线为 $y-y_1=-2(x-x_1)$，令 $y=-1$，

所以 $Q(\dfrac{2x_1+y_1+1}{2},-1)$，$H(x_1+y_1+1,-2-y_1)$，

所以直线 NH 的斜率为 $\dfrac{y_1+y_2+2}{x_2-x_1-y_1-1}$，

直线 NH 为 $y-y_2=\dfrac{y_1+y_2+2}{x_2-x_1-y_1-1}(x-x_2)$，……8 分

令 $y=-1$，

$x=\dfrac{(-1-y_2)(x_2-x_1-y_1-1)}{y_1+y_2+2}+x_2=\dfrac{y_2x_1+y_1x_2+y_1y_2+x_1+x_2-1}{y_1+y_2+2}+1$，①

将 $y_1=kx_1-4$，$y_2=kx_2-4$ 代入①式，得

$x=\dfrac{2kx_1x_2-3(x_1+x_2)+y_1y_2-1}{y_1+y_2+2}+1=\dfrac{(2k+k^2)x_1x_2-(4k+3)(x_1+x_2)+15}{k(x_1+x_2)-6}+1$，②

……10 分

将 $x_1+x_2=\dfrac{24k}{3k^2+4}$，$x_1x_2=\dfrac{36}{3k^2+4}$ 代入②式，得

$x=\dfrac{(2k+k^2)\dfrac{36}{3k^2+4}-(4k+3)(\dfrac{24k}{3k^2+4})+15}{\dfrac{24k^2}{3k^2+4}-6}=\dfrac{-15k^2+60}{6k^2-24}+1=-\dfrac{3}{2}$，

所以直线 HN 与直线 $y=-1$ 交点为定点 $\left(-\dfrac{3}{2},-1\right)$. ……12 分

22.【解析】（1）$f'(x)=ae^{x-1}-(1-a)$，……1 分

当 $0<a<1$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=1+\ln\dfrac{1-a}{a}$，

当 $x\in\left(-\infty,1+\ln\dfrac{1-a}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(1+\ln\dfrac{1-a}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$.

故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,1+\ln\dfrac{1-a}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(1+\ln\dfrac{1-a}{a},+\infty\right)$ 上单调递增. ……………………………………3 分

当 $a\geq1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………………………………4 分

（2）$g(x)=\ln x-x+\dfrac{ae^{x-1}}{x}-1$，$x\in(0,+\infty)$，$g'(x)=\dfrac{(x-1)\left(ae^{x-1}-x\right)}{x^2}$，

显然，$x=1$ 是方程 $g'(x)=0$ 的一个根.

令 $f_1(x)=ae^{x-1}-x, f_1'(x)=ae^{x-1}-1, f_1'(x)=0$ 的解为 $x=1-\ln a$，

当 $1-\ln a\leq0$，即 $a\geq e$ 时，$f_1'(x)>0$，$f_1(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不符合题意，故舍去；

当 $1-\ln a>0$，即 $a<e$ 时，$f_1(x)$ 在 $(0,1-\ln a)$ 单调递减，在 $(1-\ln a,+\infty)$ 单调递增.

若 $f_1(x)$ 有两个零点，则 $f_1(1-\ln a)=ae^{-\ln a}-1+\ln a=\ln a<0$，解得 $0<a<1$. ……………………6 分

因为 $f_1(0)=\dfrac{a}{e}>0$，$f_1(1)=a-1<0$，$f_1\left(\dfrac{2}{a}\right)=ae^{\frac{2}{a}}-\dfrac{2}{a}>a\left[1+\left(\dfrac{2}{a}-1\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{a}-1\right)^2\right]-\dfrac{2}{a}=\dfrac{a}{2}>0$，

所以方程 $ae^{x-1}-x=0$ 有两个根，设为 x_1,x_3，且 $0<x_1<1<x_3<\dfrac{2}{a}$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,x_1)$，$(1,x_3)$ 上单调递减，在 $(x_1,1)$，$(x_3,+\infty)$ 上单调递增，

故当 $0<a<1$ 时，$g(x)$ 有三个极值点 x_1，x_2，x_3，其中 $x_2=1$. ……………………………………………8 分

由 $ae^{x_1-1}=x_1$，得 $g(x_1)=\ln x_1-x_1+\dfrac{ae^{x_1-1}}{x_1}-1=\ln x_1-x_1$，同理 $g(x_3)=\ln x_3-x_3$，

又因为 $g(x_2)=g(1)=\ln1-1+a-1=a-2$，

所以

$g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)=a-2+\ln(x_1x_3)-(x_1+x_3)$

$=a-2-(x_1+x_3)+\ln\left(ae^{x_1-1}\cdot ae^{x_3-1}\right)$

$=a-2-(x_1+x_3)+\ln a^2+x_1-1+x_3-1$

$=a-4+2\ln a$， ……………………………………………………………………………10 分

令 $m(a)=a-4+2\ln a$，$0<a<1$，

则 $m'(a)=1+\dfrac{2}{a}>0$，所以 $m(a)$ 在（0，1）上单调递增，

$a\to 0$ 时，$m(a)\to-\infty$，$m(1)=-3$，

所以 $m(a)<-3$，

所以 $g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)$ 的取值范围是 $(-\infty,-3)$. ……………………………………………………………………12 分