

江苏省普通高中学业水平合格性考试模拟卷 (2)

数学试题

注意事项:

1. 本试卷包含选择题-高考 Q 群 742926234-公众号: 课标试卷(第 1 题~第 28 题, 共 28 小题 84 分)、解答题(第 29 题~第 30 题, 共 2 题 16 分)。考生答题全部答在答题卡上, 答在本试卷上无效。本次考试时间 75 分钟。考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并放在桌面, 等待监考员收回。

2. 答题前, 请务必将自己的姓名、准考证号用书写黑色字迹的 0.5 毫米签字笔填写在本试卷及答题卡上。

一、选择题-高考 Q 群 742926234-公众号: 课标试卷: 本大题共 28 小题, 每小题 3 分, 共计 84 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求。

1. 设全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $\complement_U A =$ ()

- A. \emptyset B. $\{0\}$ C. $\{0, 5\}$ D. $\{0, 2, 5\}$

1. C 解析: $\complement_U A = \{0, 5\}$. 故选 C.

2. 若 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 且 $a > b$, 则下列不等式一定成立的是 ()

- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $\frac{c^2}{b-a} < 0$
C. $ac > bc$ D. $(a-b)c^2 \geq 0$

2. D 解析: 对于 A: 当 $a=1, b=-1$, 此时 $a > b$, 但不满足 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 故 A 错误; 对于 B: 若 $c=0$, 则 $\frac{c^2}{b-a} = 0$, 故 B 错误; 对于 C: 只有当 $c > 0$, 有 $ac > bc$, 若 $c \leq 0$, 则 $ac \leq bc$, 故 C 错误; 对于 D: 由条件可知 $a-b > 0$, $c^2 \geq 0$, 则 $(a-b)c^2 \geq 0$, 故 D 正确. 故选 D.

3. 若复数 z 满足 $z(2+i) = 8-i$ (其中 i 是虚数单位), 则 z 的共轭复数 $\bar{z} =$

- ()
A. $3-2i$ B. $3+2i$ C. $4-i$ D. $4+i$

3. B 解析: $z = \frac{8-i}{2+i} = \frac{(8-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{15-10i}{5} = 3-2i$, 所以 $\bar{z} = 3+2i$. 故选 B.

4. 某工厂 10 名工人某天生产同一类型零件, 生产的件数分别是 10, 12, 14, 14, 15, 15, 16, 17, 17, 17. 记这组数据的中位数为 a , 平均数为 b , 众数为 c , 则 ()

A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$
4. C 解析: 这 10 个数据已经从小到大进行了排序, \therefore 中位数 $a = \frac{15+15}{2} = 15$, 众数为 $c=17$, 平均数

$b = \frac{10+12+14+14+15+15+16+17+17+17}{10} = 14.7$, $\therefore c > a > b$. 故选 C.

5. 若 $\exists x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 使得 $3x_0^2 - \lambda x_0 + 1 < 0$ 成立是假命题, 则实数 λ 可能取值是 ()

A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 4 D. 5

5. B 解析: 由题意得: $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, $3x^2 - \lambda x + 1 \geq 0$ 成立是真命题, 故 $3x + \frac{1}{x} \geq \lambda$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上恒成立, 由基本不等式得: $y = 3x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{3x \cdot \frac{1}{x}} = 2\sqrt{3}$, 当且仅当 $3x = \frac{1}{x}$, 即 $x = \frac{\sqrt{3}}{3} \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 时, 等号成立, 故 $\lambda \leq 2\sqrt{3}$. 故选 B.

6. 已知角 α 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合终边经过点 $P(3, m)$, 且 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{4}{5}$, 则 $m =$ ()

A. $\frac{4}{5}$ B. -4 C. 4 D. ± 4

6. C 解析: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{4}{5}$, 则题意得 $\frac{m}{\sqrt{3+m^2}} = \frac{4}{5}$, 解得 $m = 4$. 故选 C.

7. 函数 $f(x) = \frac{1}{4x-7}$ 的定义域是 ()

A. \mathbf{R} B. $\{x|x > 0\}$ C. $\left\{x|x \neq -\frac{7}{4}\right\}$ D. $\left\{x|x \neq \frac{7}{4}\right\}$

7. D 解析: 由 $4x-7 \neq 0$, 解得 $x \neq \frac{7}{4}$. 故选 D.

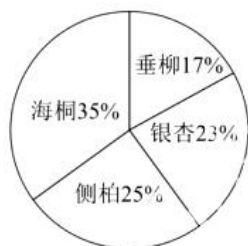
8. 为了得到函数 $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需把函数 $y = 2\sin x$ 的图象上所有的点 ()

A. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度 D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

8. C 解析: 为了得到函数 $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需把函数 $y = 2\sin x$ 的图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度. 故选 C.

9. 某学校于 3 月 12 日组织师生举行植树活动, 购买垂柳、银杏、侧柏、海桐四种树苗共计 1200 棵, 比例如图所示. 高一、高二、报名参加植树活动的人数分别为 600, 400, 200, 若每种树苗均按各年级报名人数比例进行分配, 则年级应分得银杏树的数量为 ()



- A. 34 B. 46 C. 50 D. 70

9. B 解析：由题意，年级应分得银杏树的数量为 $1200 \times 23\% \times \frac{200}{600+400+200} = 46$ 棵。故选

B.

10. 随机安排甲、乙、丙、丁、戊5位同学中的2位同学负责扫地和拖地两项工作，每人负责一项工作，则甲负责扫地工作的概率是 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

10. A 解析：由题意得其样本空间为： $\{ (甲扫, 乙拖), (甲扫, 丙拖), (甲扫, 丁拖), (甲扫, 戊拖), (乙扫, 甲拖), (乙扫, 丙拖), (乙扫, 丁拖), (乙扫, 戊拖), (丙扫, 甲拖), (丙扫, 乙拖), (丙扫, 丁拖), (丙扫, 戊拖), (丁扫, 甲拖), (丁扫, 乙拖), (丁扫, 丙拖), (丁扫, 戊拖), (戊扫, 甲拖), (戊扫, 乙拖), (戊扫, 丙拖), (戊扫, 丁拖) \}$ ，共20个样本点；“甲负责扫地工作”对应的事件为： $\{ (甲扫, 乙拖), (甲扫, 丙拖), (甲扫, 丁拖), (甲扫, 戊拖) \}$ ，含有4个样本点， \therefore 甲负责扫地工作的概率为 $P = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ 。故选 A.

11. 若 $a = 0.3^{0.5}$ ， $b = \log_{0.3} 4$ ， $c = \log_{0.5} 0.3$ ，则 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $c > a > b$

11. D 解析：根据题意， $0 < a < 1$ ， $b = \log_{0.3} 4 < 0$ ， $c = \log_{0.5} 0.3 > 1$ ，故 $c > a > b$ 。故选 D.

12. 平面 α 上有三个不共线点到平面 β 距离相等，则平面 α 与平面 β 的位置关系是 ()

- A. 相交 B. 平行 C. 垂直 D. 相交或平行

12. D 解析：如图 1，若 $\alpha \parallel \beta$ ，则平面 α 上任一点到平面 β 距离相等，故平面 α 上一定存在三个不共线点到平面 β 距离相等；如图 2，若 α 与 β 相交，则平面 α 上一定存在位于异侧的三个不共线点到平面 β 距离相等；故平面 α 与平面 β 的位置关系是相交或平行。故选 D.

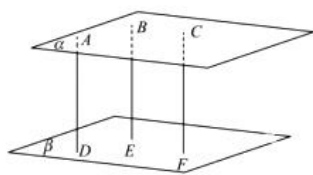


图1

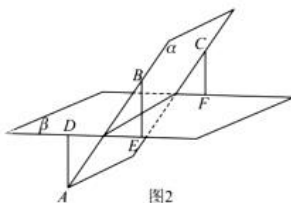


图2

13. 下列函数中是奇函数，且在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数的是

()

A. $y = x^3$

B. $y = \ln x$

C. $y = e^x + e^{-x}$

D. $y = \tan x$

13. A 解析：A, D 为奇函数，B 为非奇非偶函数，C 为偶函数，排除 B 和 C，

$y = \tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) (k \in \mathbb{R})$ 上单调递增，不满足题意，排除 D，易知 $y = x^3$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数。故选 A。

14. 已知 α 是第一象限角， $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ ，则 $\cos \alpha =$ ()

A. $-\frac{5}{13}$

B. $\frac{5}{13}$

C. $-\frac{12}{5}$

D. $\frac{12}{5}$

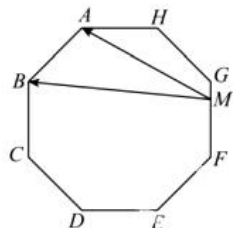
14. B 解析：因为 α 是第一象限角， $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ ，由平方关系得 $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{5}{13}$ 。故选 B。

15. 窗花是贴在窗纸或窗户玻璃上的剪纸，是中国古老的汉族传统民间艺术之一，它历史悠久，风格独特，深受国内外人士所喜爱。如图甲是一个正八边形窗花隔断，图乙是从窗花图中抽象出的几何图形示意图。已知正八边形 $ABCDEFGH$ 的边长为 $2\sqrt{2}$ ， M 是正八边形 $ABC-DEFGH$ 边上任意一点，则 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 的最大值为

()



甲



乙

A. $30 + 4\sqrt{2}$ B. $28 + 8\sqrt{2}$ C. $26 + 16\sqrt{2}$ D. $24 + 16\sqrt{2}$

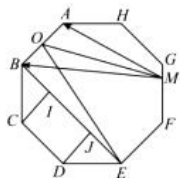
15. D 解析：如图，取 AB 的中点 O，连接 MO，连接 BE, OE，分别过点 C，点 D 作 BE 的垂线，垂足分别为 I, J，所以

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{MO}^2 - 2,$$

当点 M 与点 F 或点 E 重合时， $|\overrightarrow{MO}|$ 取得最大值，易得四边形 CDJI 为矩形，

$\triangle BCI, \triangle DEJ$ 为等腰直角三角形，则 $IJ = 2\sqrt{2}$ ， $BI = EJ = 2$ ，则 $BE = 4 + 2\sqrt{2}$ ， $BO = \sqrt{2}$ ， \overrightarrow{MO}^2 取

得最大值为 $BO^2 + BE^2 = (\sqrt{2})^2 + (1+2\sqrt{2})^2 = 26 + 16\sqrt{2}$ ，所以 $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ 的最大值为 $24 + 16\sqrt{2}$ 。故
选 D。



16. 函数 $f(x) = \lg x + 2x - 5$ 的零点所在的区间是 ()

- A. (0,1) B. (1,2) C. (2,3) D. (3,4)

16. C 解析：由于 $y = \lg x, y = 2x - 5$ 均为单调递增，所以随着 x 的增大 $f(x)$ 也增大，故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增， $\because f(1) = -3 < 0, f(2) = \lg 2 - 1 < 0, f(3) = \lg 3 + 1 > 0, f(4) = \lg 4 + 3 > 0$ ，根据零点存在定理， $f(x)$ 零点在区间 $(2, 3)$ 内。故选 C。

17. 函数 $y = x^3 + 1$ ($x \in [0, 2]$) 的最小值为 ()

- A. 1 B. 5 C. 8 D. 10

17. A 解析：因为幂函数 $y = x^3$ 在 R 上单调递增，所以 $y = x^3 + 1$ 在 $x \in [0, 2]$ 上单调递增，因此 $y_{\min} = 0^3 + 1 = 1$ 。故选 A。

18. 函数 $f(x) = \frac{2}{x-1}, x \in [2, 6]$ 的值域为 ()

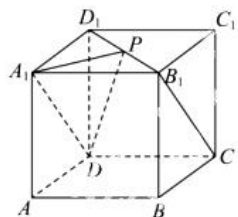
- A. R B. $[\frac{1}{3}, 2]$ C. $[\frac{2}{5}, 2]$ D. $[1, +\infty)$

18. C 解析：函数 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减，当 $x \in [2, 6]$ 时， $f(x)_{\min} = f(6) = \frac{2}{5}$ ， $f(x)_{\max} = f(2) = 2$ 。所以值域为 $[\frac{2}{5}, 2]$ 。故选 C。

19. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， P 为 B_1D_1 的中点，则直线 DP 与 B_1C 所成的角为 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

19. D 解析：如图，连接 A_1P, A_1D, DP ，因为 $A_1D \parallel B_1C$ ，所以 $\angle PDA_1$ 或其补角为直线 DP 与 B_1C 所成的角，因为 $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ， $A_1P \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ ，所以 $BB_1 \perp A_1P$ ，又 $A_1P \perp B_1D_1$ ， $BB_1 \cap B_1D_1 = B_1$ ， $BB_1, B_1D_1 \subset$ 平面 BDD_1B_1 ，所以 $A_1P \perp$ 平面 BDD_1B_1 ，又 $PD \subset$ 平面 BDD_1B_1 ，所以 $A_1P \perp PD$ ，设正方体的棱长为 2，则 $A_1D = 2\sqrt{2}$ ， $A_1P = \sqrt{2}$ ，在 $Rt\triangle A_1DP$ 中， $\sin \angle A_1DP = \frac{A_1P}{A_1D} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ ，所以 $\angle PDA_1 = \frac{\pi}{6}$ 。故选 D。



20. 当 x 越来越大时, 下列函数中增长速度最快的是 ()

- A. $y=5x$ B. $y=\log_5 x$ C. $y=x^5$ D. $y=5^x$

20. D 解析: 结合函数的性质可知, 几种函数模型中, 指数函数的增长速度最快. 故选 D.

21. 若 $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, 则角 2θ 的终边在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

21. D 解析: $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = -\frac{24}{25} < 0$, $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2 \times \frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25} > 0$, $\therefore 2\theta$ 的终边在第四象限. 故选 D.

22. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 是 AB 边上一点, 且 $\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, 则 ()

- A. $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BD}$ B. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ C. $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$ D. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

22. B 解析: 由 $\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ 可得 $3\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$, 则有 $2(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$, 可得 $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$, 所以 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$. 故选 B.

23. 已知一个圆锥的底面半径 $r=1$, 若其体积 V 与侧面积 $S_{\text{侧}}$ 之间满足 $S_{\text{侧}} = 9V$, 则该圆锥的母线长度为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ D. 2

23. C 解析: 设圆锥的高为 h , 则 $S_{\text{侧}} = \frac{1}{2} \times 2\pi r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$,

$S_{\text{侧}} = 9V$, 即 $\pi r \sqrt{r^2 + h^2} = 9 \times \frac{1}{3}\pi r^2 h$, 解得 $h^2 = \frac{1}{8}$, 该圆锥的母线长度为

$\sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. 故选 C.

24. 若 $\vec{b} = (5, 2)$, 则 $|\vec{b}| =$ ()

- A. 7 B. $\sqrt{29}$ C. 5 D. 2

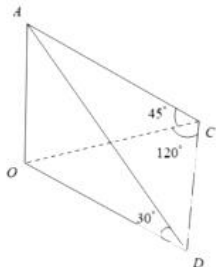
24. B 解析: 因为 $\vec{b} = (5, 2)$, 所以 $|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$. 故选 B.

25. 某人在 C 点测得某塔在南偏西 80° , 塔顶仰角为 45° , 此人沿南偏东 40° 方向前进 10 米到 D, 测得塔顶 A 的仰角为 30° , 则塔高为 ()

- A. 10 米 B. 12 米 C. 15 米 D. 20 米

25. A 解析: 由题意作出图形, 如图所示, 设塔高为 $AO = h$, 在 $\text{Rt} \triangle AOC$ 中, $\angle ACO = 45^\circ$, 则 $OC = OA = h$, 在 $\text{Rt} \triangle AOD$ 中, $\angle ADO = 30^\circ$, 则 $OD = \sqrt{3}h$, 在 $\triangle OCD$ 中, $\angle OCD = 120^\circ$, $CD = 10$, 由余弦定理得 $OD^2 = OC^2 + CD^2 - 2OC \cdot CD \cdot \cos \angle OCD$, 即

$(\sqrt{3}h)^2 = h^2 + 10^2 - 2h \times 10 \times \cos 120^\circ$, 整理得 $h^2 - 5h - 50 = 0$, 解得 $h = 10$ 或 $h = -5$ (舍去). 故选 A.



26. 若 $x \log_2 3 = 1$, 则 $3^x + 3^{-x}$ 的值为 ()

A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. $\frac{5}{2}$ D. 326. C 解析: 因为 $x \log_2 3 = 1$, 则 $\log_2 3^x = 1$, 因此 $3^x = 2$, 所以 $3^x + 3^{-x} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. 故选 C.

27. 圆柱的高等于球的直径, 圆柱的侧面积等于球的表面积, 设球的体积为 V , 则圆柱的体积为 ()

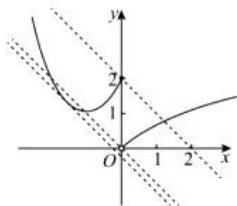
A. $\frac{3}{2}V$ B. $\frac{3}{4}V$ C. $\frac{1}{2}V$ D. $\frac{4}{3}V$

27. A 解析: 由题意知, 设球的半径为 R , 圆柱底面圆的半径为 r , 对于球, 表面积 $S_{\text{球}} = 4\pi R^2$, $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$, 对于圆柱, 侧面积 $S_{\text{圆柱}} = 2\pi r \cdot 2R = 4\pi rR$, $V_{\text{圆柱}} = \pi r^2 \cdot 2R = 2\pi r^2 R$, 因为圆柱的侧面积等于球的表面积, 所以 $4\pi R^2 = 4\pi rR$, 得 $r = R$, 则 $V_{\text{圆柱}} = 2\pi R^3$, 又 $\pi R^3 = \frac{3}{4}V_{\text{球}}$, 所以 $V_{\text{圆柱}} = 2 \cdot \frac{3}{4}V_{\text{球}} = \frac{3}{2}V_{\text{球}} = \frac{3}{2}V$. 故选 A.

28. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$ 的图象与直线 $y = k - x$ 有 3 个不同的交点, 则实数 k 的取值范围是 ()

A. $(-\frac{1}{4}, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-\frac{1}{4}, 2]$ D. $(0, 2]$

28. D 解析: 如图, 作函数 $f(x)$ 的大致图象, 平移直线 $y = k - x$, 由 $k - x = x^2 + 2x + 2$ 可得, $x^2 + 3x + 2 - k = 0$, $\Delta = 9 - 8 + 4k = 0, k = \frac{1}{4}$, 故当 $k = \frac{1}{4}$ 时, 直线 $y = -\frac{1}{4} - x$ 与曲线 $y = x^2 + 2x + 2 (x \leq 0)$ 相切; 当 $k = 0$ 时, 直线 $y = -x$ 经过点 $(0, 0)$, 且与曲线 $y = x^2 + 2x + 2 (x \leq 0)$ 有 2 个不同的交点; 当 $k = 2$ 时, 直线 $y = 2 - x$ 经过点 $(0, 2)$, 且与 $f(x)$ 的图象有 3 个不同的交点. 由图分析可知, 当 $k \in (0, 2]$ 时, $f(x)$ 的图象与直线 $y = k - x$ 有 3 个不同的交点. 故选 D.

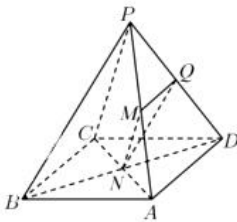


二、解答题：本大题共 2 小题，共计 16 分，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

29. (本小题满分 8 分)

如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，点 M ， N ， Q 分别是 PA ， BD ， PD 的中点。求证：

(1) $MN \parallel$ 平面 PCD ;



(2) 平面 $MNQ \parallel$ 平面 PBC .

29. 解析：(1) 由题意， N 是 AC 的中点， $\therefore MN \parallel PC$. (2 分)

$\because PC \subset$ 平面 PCD , $MN \not\subset$ 平面 PCD ,

$\therefore MN \parallel$ 平面 PCD . (4 分)

(2) 由(1)知 $MN \parallel PC$, $PC \subset$ 平面 PBC , $MN \not\subset$ 平面 PBC ,

$\therefore MN \parallel$ 平面 PBC ,

$\because ABCD$ 为平行四边形， $\therefore N$ 是 BD 中点，又 $\because Q$ 是 PD 中点，

\therefore 在 $\triangle PBD$ 中， $NQ \parallel PB$. (6 分)

$\because PB \subset$ 平面 PBC , $NQ \not\subset$ 平面 PBC , $\therefore NQ \parallel$ 平面 PBC ,

$\because MN \cap NQ = N$, $MN, NQ \subset$ 平面 MNQ ,

\therefore 平面 $MNQ \parallel$ 平面 PBC . (8 分)

30. (本小题满分 8 分)

已知锐角三角形 ABC 内角 A, B, C 的对应边分别为 a, b, c , 且 $\cos 2A - \sqrt{3} \sin A + 2 = 0$.

(1) 求 $\sin B + \sin C$ 的取值范围;

(2) 若 $a = 2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

30. 解析：(1) $\because \cos 2A - \sqrt{3} \sin A + 2 = 0$, 又 $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$,

$\therefore 2\sin^2 A + \sqrt{3} \sin A - 3 = 0$, 即 $(2\sin A - \sqrt{3})(\sin A + \sqrt{3}) = 0$,

解得 $\sin A = -\sqrt{3}$ (舍去) 或 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\because A$ 为锐角, $\therefore A = \frac{\pi}{3}$,

$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形, $\therefore 0 < B < \frac{\pi}{2}, 0 < C < \frac{\pi}{2}$,

$\because C = \frac{2\pi}{3} - B, \therefore 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2}, \therefore \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$, (2分)

$$\begin{aligned} \therefore \sin B + \sin C &= \sin B + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right) = \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B + \frac{1}{2}\sin B \\ &= \sqrt{3}\left(\sin B \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos B \times \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right), \end{aligned}$$

$\because \frac{\pi}{3} < B + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}, \therefore \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$,

$\therefore \sin B + \sin C$ 的取值范围为 $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right]$. (4分)

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos A$, 即 $12 = b^2 + c^2 - bc$,

$\therefore 12 + bc = b^2 + c^2 \geq 2bc$ (当且仅当 $b = c$ 时取等号), $\therefore bc \leq 12$, (6分)

$\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}bc \sin A \leq \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

$\because A = \frac{\pi}{3}$, 故当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时, 有最大面积为 $3\sqrt{3}$. (8分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线