绵阳市高中2021级第一次诊断性考试

理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．

BCDAC　ADBBD　CC

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．7　　14．$2\sqrt{2}$　　15．9　　16．-1

三、解答题：本大题共6小题，共70分．

17．解：（1）由 a_1，a_2，a_4 成等比数列，则 $a_2^{\ 2}=a_1\cdot a_4$，……………………2分

$\therefore (a_1+2)^2=a_1\cdot(a_1+6)$，

可解得 $a_1=2$，……………………3分

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n\cdot a_1+\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot d=n^2+n$；……………………5分

（2）$b_n+b_{n+1}=(\sqrt{2})^{a_n}=(\sqrt{2})^{2n}=2^n$ ①，……………………6分

当 $n=1$ 时，$b_1+b_2=2$，可得 $b_2=1$，……………………7分

可得 $b_{n+1}+b_{n+2}=2^{n+1}$ ②，……………………8分

由②式－①式，得 $b_{n+2}-b_n=2^{n+1}-2^n=2^n$，……………………9分

$\therefore b_{2n}=(b_{2n}-b_{2n-2})+(b_{2n-2}-b_{2n-4})+\cdots(b_4-b_2)+b_2$

$=2^{2n-2}+2^{2n-4}+\cdots 2^2+1$……………………11分

$=\dfrac{4(1-4^{n-1})}{1-4}+1$

$=\dfrac{4^n-1}{3}$．……………………12分

18．解：（1）$\because T=\dfrac{\pi}{\omega}=\dfrac{8\pi}{3}$，则 $\omega=\dfrac{3}{8}$，……………………1分

又 $f(\dfrac{\pi}{3})=\tan(\dfrac{\pi}{8}+\varphi)=1$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，……………………2分

$\therefore \varphi=\dfrac{\pi}{8}$，……………………4分

$\therefore f(x)=\tan(\frac{3}{8}x+\frac{\pi}{8})$； …………………………………………5 分

（2）由题意，$g(x)=\tan(\frac{3}{8}x+\frac{3}{8}\lambda+\frac{\pi}{8})$， …………………………6 分

$\because -f(0)=-\tan\frac{\pi}{8}=\tan(-\frac{\pi}{8})$ ……………………………………………7 分

$\therefore$ 由 $g(\frac{\pi}{4})=-f(0)$，得 $\tan(\frac{3\pi}{32}+\frac{3}{8}\lambda+\frac{\pi}{8})=\tan(-\frac{\pi}{8})$ ……………………8 分

$\therefore \frac{3}{8}\lambda+\frac{7\pi}{32}=-\frac{\pi}{8}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$， ……………………………………9 分

$\therefore \lambda=-\frac{11}{12}\pi+\frac{8k\pi}{3}$，$k\in Z$，又 $\lambda>0$， ……………………………10 分

$\therefore \lambda$ 的最小值为 $\frac{7\pi}{4}$． ……………………………………………………12 分

19．解：（1）$\because f(x)=(2x^2+m)(x-m+2)=2x^3-2(m-2)x^2+mx-m(m-2)$ 为奇函数，

$\therefore \begin{cases}-2(m-2)=0\\-m(m-2)=0\end{cases}$，解得：$m$=2． ……………………………5 分

（2）当 m>0 时，$2x^2+m$>0，

$\therefore$ 函数 $f(x)=(2x^2+m)(x-m+2)$ 不可能有两个零点． ……………………6 分

当 $m<0$ 时，由 $f(x)=0$，解得：$x=\pm\sqrt{-\frac{m}{2}}$ 或 m–2， ……………………7 分

要使得 $f(x)$ 仅有两个零点，则 $m-2=-\sqrt{-\frac{m}{2}}$， ……………………………8 分

即 $2m^2-7m+8=0$，此方程无解．

故 m=0，即 $f(x)=2x^3+4x^2$， …………………………………………………9 分

令 $h(x)=f(x)-3=2x^3+4x^2-3$，则 $h'(x)=6x^2+8x=2x(3x+4)$，

$h'(x)>0$，解得：$x>0$ 或 $x<-\frac{4}{3}$，$h'(x)<0$ 解得：$-\frac{4}{3}<x<0$，

故 $h(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{4}{3})$，$(0,+\infty)$ 上递增，在 $(-\frac{4}{3},0)$ 上递减， …………………10 分

又 $h(-\frac{4}{3})=-\frac{17}{27}<0$，

故函数 $y=f(x)-3$ 仅有一个零点．……12 分

20．解：（1）∵$\cos(C-B)\sin A=\cos(C-A)\sin B$

∴$(\cos C\cos B+\sin C\sin B)\sin A=(\cos C\cos A+\sin C\sin A)\sin B$……2 分

∴$\cos C\cos B\sin A=\cos C\cos A\sin B$……3 分

又∵$\triangle ABC$ 为斜三角形，则 $\cos C\neq0$，

∴$\cos B\sin A=\cos A\sin B$，……5 分

∴$\sin(A-B)=0$，又 A，B 为$\triangle ABC$ 的内角，

∴$A=B$；……6 分

（2）由$\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{a}{2}$，

∴$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{a}{2}$，则 $b\sin C=1$，即 $\dfrac{1}{b}=\sin C$，……7 分

由 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{a}{2}$，则 $c\sin B=1$，即 $\dfrac{1}{c}=\sin B$，……8 分

由（1）知 $A=B$ 则 $a=b$，

∴ $\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a^2}=\sin^2B-\sin^2C$，……9 分

又 $\sin C=\sin(A+B)=\sin 2B$，

∴ $\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a^2}=\sin^2B-\sin^22B=\sin^2B-4\cos^2B\sin^2B=\sin^2B-4(1-\sin^2B)\sin^2B$……10 分

令 $\sin^2B=t$，令 $f(t)=t-4(1-t)t=4t^2-3t$，

又因为 $0<\sin^2B<1$，即 $0<t<1$，

∴当 $t=\dfrac{3}{8}$ 时，$f(t)$ 取最小值，且 $f(t)_{min}=-\dfrac{9}{16}$，……11 分

综上所述：$\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a^2}$ 的最小值为 $-\dfrac{9}{16}$……12 分

21．解：（1）当 $a=2$ 时，$f(x)=(\ln x-2x+2)\ln x$，

$f'(x)=(\dfrac{1}{x}-2)\ln x+\dfrac{\ln x-2x+2}{x}=\dfrac{-2(x-1)(\ln x+1)}{x}$，……2 分

令 $f'(x)>0$ 得：$\dfrac{1}{e}<x<1$；令 $f'(x)<0$ 得：$0<x<\dfrac{1}{e}$ 或 $x>1$，……3 分

∴ $f(x)$ 的单调递减区间为：$(0,\ \frac{1}{e})$ 和 $(1,\ +\infty)$；单调递增区间为：$(\frac{1}{e},\ 1)$． ……5 分

（2）$f(x)\leqslant\frac{e^x}{x}-x^2+ax-a$ 等价于 $e^{x-\ln x}-(x-\ln x)^2+a(x-\ln x-1)\geqslant0$（*） ……6 分

令 $t=g(x)=x-\ln x$，则 $g'(x)=\frac{x-1}{x}$，

∴ $g(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 上递减，在 $(1,\ +\infty)$ 上递增。

∴ $g(x)$ 的最小值为 $g(1)=1$，即：$t\geqslant1$， ……8 分

（*）式化为：$e^t-t^2+a(t-1)\geqslant0$，当 $t=1$ 时，显然成立．

当 $t>1$ 时，$a\geqslant\frac{t^2-e^t}{t-1}$，令 $h(t)=\frac{t^2-e^t}{t-1}(t>1)$，则 $a\geqslant h_{\max}(t)$， ……9 分

$h'(t)=\frac{-(t-2)(e^t-t)}{(t-1)^2}$，当 $t>1$ 时，易知 $e^t-t>0$，

故易得：$h(t)$ 在 $(1,\ 2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减， ……10 分

∴ $h(t)_{\max}=h(2)=4-e^2$， ……11 分

∴实数 a 的取值范围为：$a\geqslant4-e^2$． ……12 分

22．解：（1）曲线 C_1 的参数方程为 C_1：$\begin{cases}x=t+\frac{1}{t}① \\ y=t-\frac{1}{t}②\end{cases}$（$t$ 为参数），

由 $①^2-②^2$ 得 C_1 的普通方程为：$x^2-y^2=4$； ……2 分

曲线 C_2 的参数方程为 C_2：$\begin{cases}x=2+2\cos\alpha \\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），

所以 C_2 的普通方程为：$(x-2)^2+y^2=4$； ……4 分

（2）曲线 C_1 的极坐标方程为：$\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta=4\ (\theta\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2})$， ……5 分

∴ $\rho^2=\frac{4}{\cos2\theta}$， ……6 分

由 $\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{6} \\ \rho^2=\frac{4}{\cos2\theta}\end{cases}$ 得：$\rho_A=2\sqrt{2}$，

∴射线：$\theta=\frac{\pi}{6}(\rho>0)$与曲线 C_1 交于 $A(2\sqrt{2},\frac{\pi}{6})$，…………7 分

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-4\rho\cos\theta=0\Rightarrow\rho=4\cos\theta$，

由 $\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{6},\\ \rho=4\cos\theta,\end{cases}$ 得：$\rho_B=2\sqrt{3}$，

∴射线：$\theta=\frac{\pi}{6}(\rho>0)$与曲线 C_2 交于 $B(2\sqrt{3},\frac{\pi}{6})$，…………9 分

则 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle POB}-S_{\triangle POA}=\frac{1}{2}\times|OP|\times(\rho_B-\rho_A)\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$．…………10 分

23．解：（1）$f(x)=|3x+3|-|x-5|=\begin{cases}2x+8,\ x\geq 5,\\ 4x-2,-1<x<5,\\ -2x-8,\ x\leq -1,\end{cases}$…………1 分

∴ $f(x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 5\\ 2x+8>0\end{cases}$或$\begin{cases}-1<x<5\\ 4x-2>0\end{cases}$或$\begin{cases}x\leq -1\\ -2x-8>0\end{cases}$，…………2 分

解得 $x\geq 5$或$\frac{1}{2}<x<5$或$x<-4$，…………4 分

∴不等式的解集为 $(-\infty,-4)\cup(\frac{1}{2},+\infty)$；…………5 分

（2）证明：由 $f(x)=\begin{cases}2x+8,x\geq 5\\ 4x-2,-1<x<5\\ -2x-8,x\leq -1\end{cases}$，可得 $f(x)$ 的最小值为 -6，…………6 分

则 $m=-6$，$a+b+c=6$，

$\therefore \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{1}{12}[(a+b)+(b+c)+(c+a)](\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})$

$=\frac{1}{12}(3+\frac{b+c}{a+b}+\frac{c+a}{a+b}+\frac{a+b}{b+c}+\frac{c+a}{b+c}+\frac{a+b}{c+a}+\frac{b+c}{c+a})$…………7 分

$\geqslant\frac{1}{12}(3+2\sqrt{\frac{b+c}{a+b}\cdot\frac{a+b}{b+c}}+2\sqrt{\frac{c+a}{a+b}\cdot\frac{a+b}{c+a}}+2\sqrt{\frac{c+a}{b+c}\cdot\frac{b+c}{c+a}}$…………8 分

$=\frac{1}{12}(3+2+2+2)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$，当且仅当 $a=b=c=2$ 时，等号成立，…………9 分

$\therefore \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{3}{4}$．…………10 分