

## 2024年1月“七省联考”考前猜想卷

# 数 学

(考试时间: 120分钟 试卷满分: 150分)

### 注意事项:

1. 本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分。答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答第I卷时, 选出每小题答案后, 用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3. 回答第II卷时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

4. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共8小题, 每小题5分, 共40分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 若全集  $U = \mathbf{R}$ ,  $A = \{x | x < 1\}$ ,  $B = \{x | x > 1\}$ , 则 ( )

- A.  $A \subseteq B$       B.  $\complement_U A = B$       C.  $B \subseteq \complement_U A$       D.  $A \cup B = \mathbf{R}$

2. 已知  $i$  为复数单位,  $\frac{3+ai}{1-i} = 2+i$ , 则  $z = 1+ai$  的模为 ( )

- A.  $\sqrt{2}$       B. 1      C. 2      D. 4

3. 在三角形  $ABC$  中,  $AC = 3$ ,  $AB = 4$ ,  $\angle CAB = 120^\circ$ , 则  $(\overline{AB} + \overline{AC}) \cdot \overline{AB} =$  ( )

- A. 10      B. 12      C. -10      D. -12

4.  $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ ,  $\cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{3}$ , 则  $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} =$  ( )

- A.  $\frac{3}{4}$       B.  $\frac{4}{3}$       C.  $\frac{3}{2}$       D.  $\frac{2}{3}$

5. 在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_2, a_6$  是方程  $x^2 - 8x + m = 0$  两根, 若  $a_3 a_5 = 3a_4$ , 则  $m$  的值为 ( )

- A. 3      B. 9      C. -9      D. -3

6. 中国国家大剧院是亚洲最大的剧院综合体, 中国国家表演艺术的最高殿堂, 中外文化交流的最大平台。大剧院的平面投影是椭圆  $C$ , 其长轴长度约为 212m, 短轴长度约为 144m。若直线  $l$  平行于长轴且  $C$  的中心到  $l$  的距离是 24m, 则  $l$  被  $C$  截得的线段长度约为 ( )

- A. 140m      B. 143m      C. 200m      D. 209m

7. “ $b = \pm\sqrt{10}$ ”是“直线  $x + y + b = 0$  与圆  $C: (x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$  相切”的 ( )

- A. 充分条件      B. 必要条件  
C. 既是充分条件又是必要条件      D. 既不是充分条件也不是必要条件



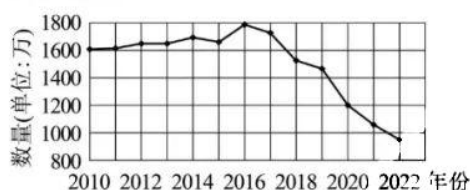
8. 设  $a = \ln 2, b = 1.09, c = e^{0.3}$ , 则 ( )

- A.  $a < b < c$   
B.  $a < c < b$   
C.  $c < a < b$   
D.  $c < b < a$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

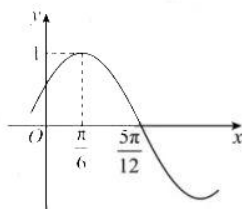
9. 近年来，我国人口老龄化持续加剧，为改善人口结构，保障国民经济可持续发展，国家出台了一系列政策，如2016年起实施全面两孩生育政策，2021年起实施三孩生育政策等．根据下方的统计图，下列结论正确的是 ( )

2010至2022年我国新生儿数量折线图



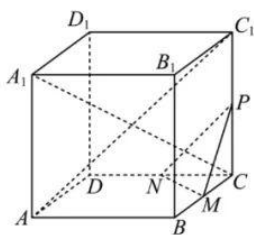
- A. 2010至2022年每年新生儿数量的平均数高于1400万  
B. 2010至2022年每年新生儿数量的第一四分位数低于1400万  
C. 2015至2022年每年新生儿数量呈现先增加后下降的变化趋势  
D. 2010至2016年每年新生儿数量的方差大于2016至2022年每年新生儿数量的方差

10. 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示，则 ( )



- A.  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$   
B. 当  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  时， $f(x)$  的值域为  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$   
C. 将函数  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位长度可得函数  $g(x) = \sin 2x$  的图象  
D. 将函数  $f(x)$  的图象上所有点的横坐标伸长为原来的2倍，纵坐标不变，得到的函数图象关于点  $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$  对称

11. 如图，在棱长为1的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $P$  为棱  $CC_1$  上的动点(点  $P$  不与点  $C, C_1$  重合)，过点  $P$  作平面  $\alpha$  分别与棱  $BC, CD$  交于  $M, N$  两点，若  $CP = CM = CN$ ，则下列说法正确的是 ( )



- A.  $A_1C \perp$  平面  $\alpha$   
 B. 存在点  $P$ , 使得  $AC_1 \parallel$  平面  $\alpha$

C. 存在点  $P$ , 使得点  $A_1$  到平面  $\alpha$  的距离为  $\frac{5}{3}$

D. 用过点  $P, M, D_1$  的平面去截正方体, 得到的截面一定是梯形

12. 抛物线有如下光学性质: 由其焦点射出的光线经抛物线反射后, 沿平行于抛物线对称轴的方向射出. 反之, 平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点. 已知抛物线

$C: y^2 = 2x$ ,  $O$  为坐标原点, 一束平行于  $x$  轴的光线  $l_1$  从点  $P(m, 2)$  射入, 经过  $C$  上的点  $A(x_1, y_1)$  反射后, 再经过  $C$  上另一点  $B(x_2, y_2)$  反射后, 沿直线  $l_2$  射出, 经过点  $Q$ , 则 ( )

A.  $x_1 x_2 = \frac{1}{4}$

B. 延长  $AO$  交直线  $x = -\frac{1}{2}$  于点  $D$ , 则  $D, B, Q$  三点共线

C.  $|AB| = \frac{13}{4}$

D. 若  $PB$  平分  $\angle ABQ$ , 则  $m = \frac{9}{4}$

三. 填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分

13. 给定条件: ①  $f(x)$  是奇函数; ②  $f(xy) = f(x)f(y)$ . 写出同时满足①②的一个函数  $f(x)$  的解析式: \_\_\_\_\_.

14. 已知  $(ax-2)(x+\frac{2}{x})^5$  的展开式中的常数项为240, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

15. 为备战巴黎奥运会, 某运动项目进行对内大比武, 王燕、张策两位选手进行三轮两胜的比拼, 若王燕获胜的概率为  $\frac{3}{4}$ , 且每轮比赛都分出胜负, 则最终张策获胜的概率为 \_\_\_\_\_.

16. 四棱锥  $P-ABCD$  各顶点都在球心  $O$  为的球面上, 且  $PA \perp$  平面  $ABCD$ , 底面  $ABCD$  为矩形,  $PA = AD = 2, AB = 2\sqrt{2}$ , 设  $M, N$  分别是  $PD, CD$  的中点, 则平面  $AMN$  截球  $O$  所得截面的面积为 \_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共6小题, 共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分10分) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ , 且点  $(\frac{1}{a_{n+1}}, \frac{1}{a_n})$  在直线  $y = x + 1$  上

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 数列  $\{a_n a_{n+1}\}$  前  $n$  项和为  $T_n$ , 求能使  $T_n < 3m - 12$  对  $n \in \mathbb{N}^*$  恒成立的  $m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) 的最小值.

18. (本小题满分12分) 在锐角  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $c - 2b \cos A = b$ .

(1) 求证:  $A = 2B$ ;

(2) 若  $A$  的角平分线交  $BC$  于  $D$ , 且  $c = 2$ , 求  $\triangle ABD$  面积的取值范围.

19. (本小题满分12分) 直播带货是一种直播和电商相结合的销售手段, 目前已被广大消费者所接受. 针对这种现状, 某公司决定逐月加大直播带货的投入, 直播带货金额稳步提升, 以下是该公司2023年前5个月的带货金额:

月份 $x$	1	2	3	4	5
带货金额 $y$ /万元	350	440	580	700	880

(1) 计算变量  $x, y$  的相关系数  $r$  (结果精确到0.01).

(2) 求变量  $x, y$  之间的线性回归方程, 并据此预测2023年7月份该公司的直播带货金额.

(3) 该公司随机抽取55人进行问卷调查, 得到如下不完整的列联表:

	参加过直播带货	未参加过直播带货	总计
女性	25		30
男性		10	
总计			

请填写上表, 并判断是否有90%的把握认为参加直播带货与性别有关.

参考数据:  $\bar{y} = 590$ ,  $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 10$ ,  $\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 176400$ ,

$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 1320$ ,  $\sqrt{441000} \approx 664$ .

参考公式: 相关系数  $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$ , 线性回归方程的斜率  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ , 截距

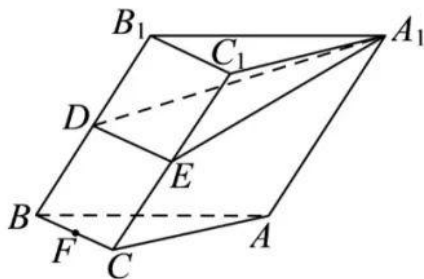
$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ .

附:  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ , 其中  $n = a+b+c+d$ .

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025
$k_0$	2.072	2.706	3.841	5.024

20. (本小题满分12分) 如图, 三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的底面是等边三角形,  $AB = AA_1 = 6$ ,  $\angle ABB_1 = 60^\circ$ ,  $D, E, F$  分别为  $BB_1, CC_1, BC$  的中点.





(1) 在线段  $AA_1$  上找一点  $G$ ，使  $FG \parallel$  平面  $A_1DE$ ，并说明理由；

(2) 若平面  $AA_1B_1B \perp$  平面  $ABC$ ，求平面  $A_1DE$  与平面  $ABC$  所成二面角的正弦值。

21. (本小题满分12分) 已知直线  $x+y+1=0$  与抛物线  $C: x^2=2py (p>0)$  相切于点  $A$ ，动直线  $l$  与抛物线  $C$  交于不同两点  $M, N$  ( $M, N$  异于点  $A$ )，且以  $MN$  为直径的圆过点  $A$ 。

(1) 求抛物线  $C$  的方程及点  $A$  的坐标；

(2) 当点  $A$  到直线  $l$  的距离最大时，求直线  $l$  的方程。

22 (本小题满分12分) 已知函数  $f(x)=(x-1)\ln(x-2)-a(x-3)$ ， $a \in \mathbf{R}$ 。

(1) 若  $a=1$ ，讨论  $f(x)$  的单调性；

(2) 若当  $x>3$  时， $f(x)>0$  恒成立，求  $a$  的取值范围。



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

