姓名＿＿＿＿＿＿＿＿ 准考证号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

（在此卷上答题无效）

绝密★启用前

三湘名校教育联盟 湖湘名校教育联合体 ·2024届高三10月大联考

数　学

本试卷共4页。全卷满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1.答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷和答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应的答案标号涂黑，如有改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案；回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合$A=\{x|x^2+5x+6>0\}$，则$\complement_{\mathbf{R}}A=$

A.$[-1,6]$　　B.$[-6,1]$　　C.$[2,3]$　　D.$[-3,-2]$

2.已知复数z满足$\frac{z}{3+4i}=\frac{4-3i}{z}$，则$|z|=$

A.3　　B.5　　C.9　　D.25

3.已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.若$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\mu\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则下列各式一定成立的是

A.$\lambda+\mu=0$　　B.$\lambda\mu=-1$　　C.$\lambda\mu=0$　　D.$\lambda\mu=-1$

4.已知正实数x,y,z满足$(x+2y)(2y+3z)=4$，则$x+4y+3z$的最小值为

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

5.在平面α外有两条直线m和n，设m和n在平面α内的射影分别是直线m_1和n_1，则下列结论正确的是

A.$m_1\perp n_1$是$m\perp n$的充分条件

B.$m_1\perp n_1$是$m\perp n$的必要条件

C.m_1与n_1相交是m与n相交或重合的充分条件

D.m_1与n_1平行或重合是m与n平行的必要条件

6.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=-1,a_{n+1}=\left(\frac{1}{e}\right)^{a_n}$，则下列结论正确的是

A.数列$\{a_n\}$为单调递增数列　　B.数列$\{a_n\}$为单调递减数列

C.$a_{2022}<a_{2023}$　　D.$a_{2023}<a_{2024}$

7.在平面直角坐标系xOy中，已知点$A(-2,0),B(4,0),M(1,m)$，动点P满足$2|PA|=|PB|$，设动点P的轨迹为曲线C，若曲线C上存在两点E,F，使得$EM\perp MF$，则实数m的取值范围是

A.$[-4\sqrt{2},4\sqrt{2}]$　　B.$[-7,7]$　　C.$[-\sqrt{7},\sqrt{7}]$　　D.$[-32,32]$

8. 已知函数 $f(x)=e^{2x}-2ae^{x}-4a^{2}x(a>0)$，若函数 $f(x)$ 的值域与 $f(f(x))$ 的值域相同，则 a 的取值范围是

A. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　B. $(0,1]$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，侧棱 SC 垂直于底面，且 $SC=AB$，则

A. 直线 BD 与 SC 所成角为 $\frac{\pi}{2}$

B. 直线 BD 与 SD 所成角为 $\frac{\pi}{4}$

C. 直线 BD 与平面 SCD 所成角为 $\frac{\pi}{6}$

D. 平面 SBD 与平面 $ABCD$ 夹角的正切值为 $\sqrt{2}$

10. 已知点 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$，$M(\cos\gamma,\sin\gamma)$ 且 $0<\alpha<\gamma<\beta<\pi$，设 $\overrightarrow{OM}=\lambda(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，$O$ 为坐标原点，则下列结论一定正确的是

A. $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OB}$　　B. $\sin\gamma=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

C. 当 $\lambda=1$ 时，$\beta=\alpha+\frac{\pi}{3}$　　D. 当 $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$ 时，$\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2}$

11. 已知 F_1,F_2 为双曲线 C 的两个焦点，P 为双曲线 C 上一点，且 $\angle F_1PF_2=60^\circ$，$|PF_1|=m|PF_2|$ $(2\leqslant m\leqslant 3)$，则双曲线 C 的离心率可以为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

12. 已知函数 $f(x)=e^{x}+x\ln x-x^{2}$ 的导函数为 $g(x)$，则

A. $g(x)$ 无最小值　　B. $f(x)$ 无最小值

C. $f(2021)+f(2023)>2f(2022)$　　D. $f(2021)+f(2023)<2f(2022)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\left(\frac{1}{x^{2}}-2x\right)^{n}$ 的展开式中第 3 项与第 7 项的二项式系数相等，则 $\left(\frac{1}{x^{2}}-2x\right)^{n}$ 的展开式中系数最大的项的系数为________.

14. 小明准备用 9 万元投资 A,B 两种股票，已知这两种股票的收益独立，且这两种股票的买入价都是每股 1 元，每股收益的分布列如下表所示. 若投资 A 种股票 a 万元，则小明两种股票的收益期望和为________万元.

股票 A 每股收益的分布列

收益 X/元	-1	0	3
概率	0.3	0.2	0.5

股票 B 每股收益的分布列

收益 Y/元	-3	4
概率	0.4	0.6

15. 已知 $\omega>0$，函数 $f(x)=\sin\omega x$ 与 $g(x)=\cos x$ 的图象在 $[0,\pi]$ 上恰有两个交点，则 ω 的值为________.

16. 如下表格给出了一个“等差数阵”，其中每行、每列的数都构成等差数列，$a_{i,j}$表示位于第 i 行、第 j 列的数.

10	13	( )	( )	…	$a_{1,j}$	…
13	18	( )	( )	…	$a_{2,j}$	…
( )	( )	( )	( )	…	$a_{3,j}$	…
…	…	…	…	…	…	…
$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	$a_{i,4}$	…	$a_{i,j}$	…
…	…	…	…	…	…	…

表格中 $a_{3,4}$的值为________，2023 在该数阵中共出现________次.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

影响一个城市消费水平的原因有很多，其中一个重要的指标就是该城市的月平均工资. 2022 年“双十一”已经过去，某机构借助国内几个主要的网购交易平台，统计了部分城市“双十一”当天的人均交易额(单位：百元)如下表：

城市	北京	上海	深圳	广州	宁波	厦门	苏州
人均交易额	5.3	5.9	5.1	4.6	3.8	4.3	3.9

通过查阅人社局的报告，我们得到了上述七个城市的 2022 年的月平均工资(单位：百元)如下表：

城市	北京	上海	深圳	广州	宁波	厦门	苏州
月平均工资	92	88	82	75	73	69	67

(1)从散点图可以发现，月平均工资与双十一交易额之间大致成正相关关系，即月平均工资越高，双十一当天的人均交易额越高，请求出人均交易额 y(百元)与月平均工资 x(百元)的经验回归方程(保留小数点后两位有效数字)；

(2)若长沙市 2023 年的月平均工资为 62 百元，请预测长沙市在今年双十一中的人均交易额.

附：参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\cdot\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\cdot\bar{x}$.

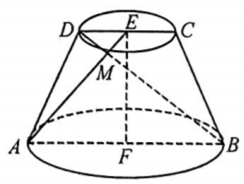
参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2=43136$，$\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i=2605.4$，$\bar{y}=4.7$，$\bar{x}=78$.

18.（本小题满分 12 分）

如图所示，四边形 $ABCD$ 是圆台 EF 的轴截面，M 是上底面圆周上异于 C，D 的一点，圆台的高 $EF=\sqrt{3}$，$AB=2CD=4$.

(1)证明：$\triangle AMB$ 是直角三角形；

(2)是否存在点 M 使得平面 ADM 与平面 DME 的夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$？若存在，求出点 M 的位置；若不存在，请说明理由.

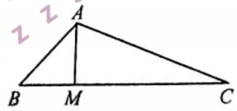


19.(本小题满分 12 分)

如图,$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.若 $b^2+c^2=a^2-bc$.

(1)求角 A 的大小;

(2)若 M 是线段 BC 上的点,$AM=1$,$|MC|=3|MB|$,求 $b+3c$ 的最大值.



20.(本小题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$,$a_{n+1}=a_n^2$,$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{a_n}{a_{n+1}-1}$,其前 n 项和为 S_n,数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=\dfrac{a_n}{a_n+1}$,其前 n 项积为 T_n,求证:$S_n+2T_n=2$.

21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴长为 4,离心率为 $\dfrac{1}{2}$,定点 $P(-4,0)$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)设直线 AB 与椭圆 C 分别交于点 A,B(P 不在直线 AB 上),若直线 PA,PB 与椭圆 C 分别交于点 M,N,且直线 AB 过定点 $Q\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)$,问直线 MN 的斜率是否为定值?若是,求出定值;若不是,说明理由.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x+ax(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $y=f(x)-a$ 的零点个数;

(2)若 $a>-1$ 且函数 $y=f(x)-a$ 有两个零点 x_1,x_2,证明:$|x_1-x_2|<\left(\dfrac{2}{a}+1\right)$.

三湘名校教育联盟 湖湘名校教育联合体 ·2024届高三10月大联考·数学

参考答案、提示及评分细则

1.【答案】D

【解析】由已知有$(-\infty,-3)\cup(-2,+\infty)$,所以$\complement_{\mathbf{R}}A=[-3,-2]$.故选D.

【命题立意】本题考查集合的补集运算,考查学生的数学运算能力.

2.【答案】B

【解析】由已知有$\dfrac{|z|}{|3+4\mathrm{i}|}=\dfrac{|4-3\mathrm{i}|}{|z|}$,所以$|z|=5$.故选B.

【命题立意】本题考查复数的乘法运算,复数的模,考查学生的数学运算能力.

3.【答案】A

【解析】$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\mu\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mu\boldsymbol{a}^2+(\lambda\mu+1)(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\lambda\boldsymbol{b}^2=2(\lambda+\mu)=0$,所以$\lambda+\mu=0$,故选A.

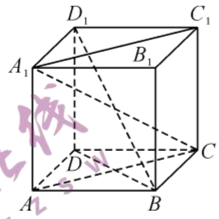
【命题立意】本题考查向量的数量积运算,考查学生的数学运算能力.

4.【答案】B

【解析】$x+4y+3z=(x+2y)+(2y+3z)\geqslant2\sqrt{(x+2y)(2y+3z)}=4$,故选B.

【命题立意】本题考查基本不等式,考查学生的逻辑推理以及数学运算能力.

5.【答案】D



【解析】在如图所示的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,若取平面α为平面$ABCD$,m_1,n_1分别为AC,BD,m,n分别为A_1C,BD_1,满足$m_1\perp n_1$,但是不满足$m\perp n$,故A错误;

若取平面α为平面ADD_1A_1,m_1,n_1分别为A_1D_1,AD_1,m,n分别为A_1C_1,BD_1,满足$m\perp n$,但是不满足$m_1\perp n_1$,故B错误;

若取平面α为平面$ABCD$,m_1,n_1分别为AC,BD,m,n分别为AC_1,B_1D_1,满足m_1与n_1相交,但是m与n异面,故C错误;

当m与n平行时,m_1与n_1平行或重合,故D正确.故选D.

【命题立意】本题考查空间中直线与直线的位置关系、充要条件,考查学生的数学抽象、逻辑推理能力.

6.【答案】D

【解析】由$a_1=-1$可知,$a_2=\mathrm{e}>0$,$a_3=\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{e}}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}<\mathrm{e}$,故AB错误;

又$a_{n+1}=\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^{a_n}$,所以当$n>1$时,$a_n>0$,构造函数$f(x)=x\mathrm{e}^x$,

易知函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又$f(0)=0$,$f(1)=\mathrm{e}$,

故存在$x_0\in(0,1)$使得$f(x_0)=x_0\mathrm{e}^{x_0}=1$,即$x_0=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x_0}}$,

所以当$a_n>x_0$时,$a_{n+1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a_n}}<\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x_0}}=x_0$,当$a_n<x_0$时,$a_{n+1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a_n}}>\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x_0}}=x_0$,

又$a_1=-1<x_0$,所以当n为奇数时,$a_n<x_0$;当n为偶数时,$a_n>x_0$,故选D.

【命题立意】本题为新概念辨析问题,通过材料并结合数列相关知识了解并探究新概念所具有的性质和结论,在分析材料的过程中培养学生的逻辑推理,数学抽象,转化归纳的能力.

7.【答案】C

【解析】设 $P(x,y)$，由 $2|PA|=|PB|$，得 $2\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$，

化简得 $(x+4)^2+y^2=16$，如图，设圆心为 Q，

因为 $\triangle EMF$ 为直角三角形，$\angle EMF=90^\circ$，若 ME,MF 为切线，则 $\angle QME=45^\circ$，

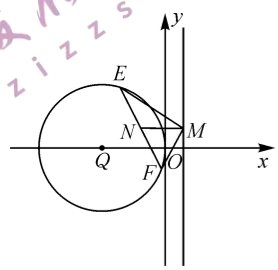
在 $\mathrm{Rt}\triangle QME$ 中，$\angle QME=45^\circ$，$\angle QEM=90^\circ$，$|QE|=4$，所以 $|QM|=4\sqrt{2}$，

要使圆 Q 上存在点 E,F，使得 $EM\perp MF$，

则过 M 到向圆引的两条切线的夹角不小于 90°，

即圆心 $Q(-4,0)$ 到点 $M(1,m)$ 的距离不大于 $4\sqrt{2}$，

即 $|QM|=\sqrt{5^2+m^2}\leqslant 4\sqrt{2}$，解得 $m\in[-\sqrt{7},\sqrt{7}]$. 故选 C.



【命题立意】本题以阿波罗尼斯圆为背景，借助直角三角形斜边上的中线长为斜边长的一半的性质来求解参数范围，考查了圆的方程、直线与圆的位置关系，考查了直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养.

8.【答案】D

【解析】由 $f(x)=e^{2x}-2ae^x-4a^2x(a>0)$，

有 $f'(x)=2e^{2x}-2ae^x-4a^2=2(e^x+a)(e^x-2a)$.

当 $a>0$ 时，$e^x+a>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2a)$ 上单调递减，在 $(\ln 2a,+\infty)$ 上单调递增，

则 $f(x)_{\min}=f(\ln 2a)=-4a^2\ln 2a$，故 $f(x)$ 的值域为 $[-4a^2\ln 2a,+\infty)$，

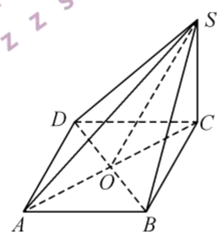
令 $t=f(x)$，则 $t\in[-4a^2\ln 2a,+\infty)$，要使得 $f(f(x))$ 的值域也为 $[-4a^2\ln 2a,+\infty)$，

则 $-4a^2\ln 2a\leqslant \ln 2a$，即 $(1+4a^2)\ln 2a\geqslant 0$，故 $a\geqslant\frac{1}{2}$. 故选 D.

【命题立意】本题考查函数的值域问题，考查学生逻辑推理，数学运算等核心素养.

9.【答案】AD

【解析】如图，连接 AC 与 BD 交于点 O. 因为 $SC\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $SC\perp BD$. 因为 $BD\perp AC$，$AC\cap SC=C$，所以 $BD\perp$ 平面 SAC. 而 $SC\subset$ 平面 SAC，所以 $BD\perp SC$，即直线 BD 与 SC 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$，A 正确；



设 $AB=AD=1$，则 $SC=1$，$SD=SB=BD=\sqrt{2}$，所以 $\triangle SBD$ 为正三角形，所以直线 BD 与 SD 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，B 错误；

易知直线 BD 与平面 SCD 所成角即 $\angle BDC$，所以直线 BD 与平面 SCD 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$，C 错误；

设 $AB=SC=1$，$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，AC 是对角线，O 是 AC 的中点，$\therefore$ 可得 $AO=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $\triangle SBD$ 为等边三角形且 O 为线段 BD 中点，所以 $SO\perp BD$. 因为 $AO\perp BD$，且平面 $SBD\cap$ 平面 $ABCD=BD$. 所以平面 SBD 与平面 $ABCD$ 的夹角为 $\angle SOC$. 而 $\tan\angle SOC=\sqrt{2}$. 所以 D 正确. 故选 AD.

【命题立意】本题为立体几何中常见的求角问题. 对于这类问题的通解通法为：几何法和向量法. 重点考查了学生对线线角、线面角、面面角的定义的理解以及空间向量法在求角过程中的一般步骤. 培养学生几何直观、数形结合的数学思想.

10.【答案】AB

【解析】对于 A，由$\overrightarrow{OM}=\lambda(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$得$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}=\lambda(1+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})$，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OB}=\lambda(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+1)=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}$，故 A 正确；

对于 B，由 A 有 $\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha=\cos\gamma\cos\beta+\sin\gamma\sin\beta$，则 $\cos(\gamma-\alpha)=\cos(\gamma-\beta)$，而 $0<\alpha<\gamma<\beta<\pi$，因此有$(\gamma-\alpha)+(\gamma-\beta)=0$，即 $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$，因此 $\sin\gamma=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$，故 B 正确；

对于 C，D，因为$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OM}$是单位向量，由$\overrightarrow{OM}=\lambda(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$得$\overrightarrow{OM}^2=\lambda^2(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})$，而$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\beta-\alpha)$，因此 $\cos(\beta-\alpha)=\frac{1}{2\lambda^2}-1$，当 $\lambda=1$ 时，$\cos(\beta-\alpha)=-\frac{1}{2}$，而 $0<\beta-\alpha<\pi$，则 $\beta-\alpha=\frac{2\pi}{3}$，即 $\beta=\alpha+\frac{2\pi}{3}$，故 C 错误；

当 $\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$，即 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$时，$\cos(\beta-\alpha)=\cos\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2\lambda^2}-1=0$，$\lambda^2=\frac{1}{2}$，$\lambda=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 D 错误. 故选 AB.

【命题立意】本题考查三角函数、向量的运算，考查学生的逻辑推理、数学运算能力.

11.【答案】AB

【解析】法一：因为$|PF_1|=m|PF_2|$，由双曲线的定义可得$|PF_1|-|PF_2|=(m-1)|PF_2|=2a$，所以$|PF_2|=\frac{2a}{m-1}$，$|PF_1|=\frac{2ma}{m-1}$. 又因为$\angle F_1PF_2=60°$，由余弦定理可得$\left(\frac{2a}{m-1}\right)^2+\left(\frac{2ma}{m-1}\right)^2-2\frac{2a}{m-1}\cdot\frac{2ma}{m-1}\cos 60°=4c^2$. 化简可得$\frac{c^2}{a^2}=1+\frac{m}{(m-1)^2}=1+\frac{1}{m+\frac{1}{m}-2}$，$\frac{c^2}{a^2}$的表达式在 $2\leqslant m\leqslant 3$ 上为减函数，可得离心率的最大值为$\sqrt{3}$，故选 AB.

法二：利用双曲线中焦点三角形的面积公式 $S=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$，可得 $S=\frac{b^2}{\tan 30°}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a}{m-1}\cdot\frac{2ma}{m-1}\sin 60°$. 即$\frac{c^2}{a^2}=1+\frac{m}{(m-1)^2}=1+\frac{1}{m+\frac{1}{m}-2}$，后面解答同法一.

【命题立意】本题为双曲线背景，利用双曲线的定义将离心率和解三角形结合起来，进行巧妙地转化，考查学生转化与化归，数形结合的数学思想，培养学生的直观想象、数学运算等数学素养.

12.【答案】AC

【解析】由于函数 $f(x)=e^x+x\ln x-x^2$ 的导函数为 $g(x)$，则 $g(x)=e^x+\ln x-2x+1$，又 $g(x)=e^x+\ln x-2x+1$ 的导函数 $h(x)=e^x+\frac{1}{x}-2>x+\frac{1}{x}-2\geqslant 0$，故 $g(x)=e^x+\ln x-2x+1$ 在定义域$(0,+\infty)$上为增函数，因此 $g(x)$无最小值，故 A 正确；

当 $x\to 0$ 时，$e^x\to 1$，$\ln x\to-\infty$，$2x\to 0$，故 $g(x)=e^x+\ln x-2x+1\to-\infty$；又因为 $g(1)=e+\ln 1-2+1=e-1>0$，故一定存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $g(x_0)=0$，所以 $f(x)$在$(0,x_0)$单调递减，在$(x_0,+\infty)$单调递增，故 $f(x)$在 $x=x_0$ 处取得最小值，故 B 错误；

又 $g(x)=e^x+\ln x-2x+1$ 在定义域$(0,+\infty)$上为单调递增函数，可知 $f(x)=e^x+x\ln x-x^2$ 在$(0,+\infty)$上为凹函数，可得$\frac{f(2021)+f(2023)}{2}>f\left(\frac{2021+2023}{2}\right)$，即 $f(2021)+f(2023)>2f(2022)$，故 C 正确，D 错误. 故选 AC.

【命题立意】本题考查函数的导数，单调性，最值，凹凸性，切线放缩，以函数为着力点考查学生逻辑推理、数学运算、数学抽象等数学学科核心素养，在分析问题的过程中培养学生构造函数、转化化归等能力.

13.【答案】1792

【解析】由 $C_n^2=C_n^6$ 有 $n=8$，所以 $\left(\frac{1}{x^2}-2x\right)^n$ 的展开式的通项为 $C_8^r\left(\frac{1}{x^2}\right)^{8-r}(-2x)^r$，当展开式的项的系数最大时，$r$ 为偶数，比较得当 $r=6$ 时，展开式中项的系数最大，该项系数为 1792.

【命题立意】本题考查二项式定理，考查学生的逻辑推理、数学运算能力.

14.【答案】10.8

【解析】$E(X)=-1\times0.3+0\times0.2+3\times0.5=1.2$；$E(Y)=-3\times0.4+4\times0.6=1.2$.

若投资 A 股票 a 元，则投资 B 股票 $90000-a$ 元，

$E(aX)+E((90000-a)Y)=aE(X)+(90000-a)E(Y)=90000\times1.2=108000$，

即小明两种股票的收益期望和为 10.8 万元.

【命题立意】本题考查离散型随机变量的期望与方差的实际应用问题，考查学生数据分析、逻辑推理和数学运算学科核心素养. 培养学生利用数学知识解决生活中实际问题的能力.

15.【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】作出函数 $g(x)=\cos x$ 的图象，由于函数 $f(x)=\sin\omega x$ 的图象是由函数 $y=\sin x$ 的图象上所有的点的纵坐标不变，横坐标伸长或者缩短到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍而得到的，因此由图象可知 $\omega=\frac{3}{2}$.

【命题立意】本题为三角函数图象的性质研究，主要考查 ω 对三角函数图象的影响，考查分类讨论的基本思想，提升学生数学抽象、直观想象和逻辑推理等数学素养.

16.【答案】37　6　公众号：数学北极星

【解析】第一列第 i 个数 $a_{i,1}=10+3(i-1)=3i+7$，又因为第一行、第二行、第三行…的公差依次是 3，5，7，…，可以得到第 i 行的公差为 $2i+1$，于是有 $a_{i,j}=3i+7+(2i+1)(j-1)=2ij+i+j+6$.

因此 $a_{3,4}=2\times3\times4+3+4+6=37$.

当 2023 出现在数阵中时，$2023=2ij+i+j+6$，即 $j=-\frac{1}{2}+\frac{4035}{2(2i+1)}$. 因为 i 和 j 都是正整数，故 4035 必是 $2i+1$ 的倍数，又因为 $4035=3\times5\times269$，所以 4035 的因数有 1，3，5，15，269，807，1345，4035 共 8 个. 因此解的情况列表为：

$2i+1$	1	3	5	15	269	807	1345	4035
i	0	1	2	7	134	403	672	2017
j	2017	672	403	134	7	2	1	0

舍去使 i 或 j 为 0 的解，共得到 6 组满足条件的 i 和 j，因此 2023 在数阵中共出现 6 次.

【命题立意】本题以等差数阵为媒介，考察学生对等差数列的通项公式及整数约分等相关内容的掌握情况. 在分析问题的过程中，让学生通过运算观察数列的规律，对等差数列进行推算，提升学生的推理能力和运算素养.

17. 解：(1) $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\cdot\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\cdot\overline{x}^2}=\frac{2605.4-7\times78\times4.7}{43136-7\times78\times78}\approx0.07$，…………………… 3 分

$\hat{a}=4.7-0.07\times78=-0.76$，…………………… 6 分

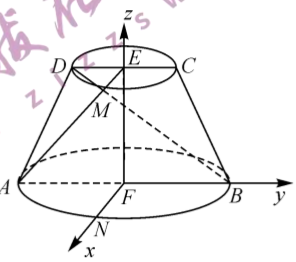
所以人均交易额 y(百元)与月平均工资 x(百元)的经验回归方程为 $y=0.07x-0.76$; …………………… 7 分

(2)当 $x=62$ 时,$y=0.07\times62-0.76=3.58$(百元), …………………………………………………………………… 9 分

所以预测长沙市在今年双十一中的人均交易额为 3.58 百元. ……………………………………………………… 10 分

【命题立意】本题考查线性回归方程,预测值等知识,考查学生的数据处理、逻辑推理以及数学运算能力.

18.【解析】(1)由题设,$EF\perp$上底面圆 E,



$\therefore ME\subset$上底面圆 E,$\therefore EF\perp ME$,

$\because EF=\sqrt{3}$,$ME=1$,$\therefore MF=2$,

又 $AB=4$,$\therefore AF=BF=MF$,

$\therefore\triangle AMB$ 是直角三角形; ………………………………………………………………………… 5 分

(2)假设存在点 M 使得平面 ADM 与平面 DME 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$,如图,取$\overset{\frown}{AB}$的中点 N,连接 FN,以 F 为原点,$\overrightarrow{FN}$,$\overrightarrow{FB}$,$\overrightarrow{FE}$分别为 x,y,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,

易知 $A(0,-2,0)$,$D(0,-1,\sqrt{3})$,$E(0,0,\sqrt{3})$, ……………………………………………………………… 7 分

设 $M(\sin\theta,\cos\theta,\sqrt{3})$,则$\overrightarrow{AD}=(0,1,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{DM}=(\sin\theta,\cos\theta+1,0)$,

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$是平面 ADM 的法向量,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DM}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}y+\sqrt{3}z=0,\\x\sin\theta+y(\cos\theta+1)=0,\end{cases}$

令 $y=-\sqrt{3}\sin\theta$,则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3}(\cos\theta+1),-\sqrt{3}\sin\theta,\sin\theta)$, ………………………………………… 9 分

易知平面 EDM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$,

由题意得 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|\sin\theta|}{\sqrt{3(\cos\theta+1)^2+3\sin^2\theta+\sin^2\theta}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, ……………………… 10 分

解得 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$,此时 $\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………………… 11 分

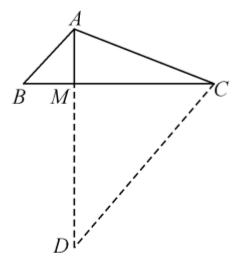
故存在点 $M\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$,使得平面 ADM 与平面 DME 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$. ………………… 12 分

【命题立意】本题考查线线垂直,二面角等相关知识,考查学生的数学抽象,逻辑推理以及数学运算能力.

19.【解析】(1)在$\triangle ABC$ 中,由余弦定理有 $b^2+c^2=a^2+2bc\cos A=a^2-bc$,

所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$, …………………………………………………………………………………………… 3 分

又因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{2}{3}\pi$; ……………………………………………………………… 5 分



(2)延长 AM 至 D 使得 $MD=3AM$,连接 CD,

易知 $AB/\!/CD$,

所以 $CD=3c$,$AD=4$,$\angle ACD=\frac{\pi}{3}$, ……………………………………………………………… 7 分

在$\triangle ACD$ 中,由余弦定理有 $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos\angle ACD$, ………………………… 8 分

即 $16=b^2+9c^2-3bc$, …………………………………………………………………………………………… 10 分

因此$(b+3c)^2-16=9bc\leqslant3\times\left(\frac{b+3c}{2}\right)^2$,

解之得 $b+3c\leqslant 8$，当且仅当 $b=4,c=\frac{4}{3}$ 时取等号. …………………………………… 11 分

所以 $b+3c$ 的最大值为 8. …………………………………………………… 12 分

【命题立意】本题考查余弦定理，考查学生的逻辑推理以及数学运算能力.

20.【解析】(1)由题意可知 $a_n>0,n\in\mathbf{N}^*$，则由 $a_{n+1}=a_n^2$，

两边取对数可知 $\ln a_{n+1}=2\ln a_n$， …………………………………………… 1 分

故 $\{\ln a_n\}$ 是首项为 $\ln a_1=\ln 2$，公比为 2 的等比数列， ………………………… 2 分

所以 $\ln a_n=2^{n-1}\ln 2=\ln 2^{2^{n-1}}$， …………………………………………… 3 分

即 $a_n=2^{2^{n-1}},n\in\mathbf{N}^*$； ……………………………………………………… 4 分

(2)由(1)可知 $a_n=2^{2^{n-1}}$，

故 $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}-1}=\frac{2^{2^{n-1}}}{2^{2^n}-1}$，$c_n=\frac{a_n}{a_n+1}=\frac{2^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}}+1}$， ………………………………… 5 分

故 $T_n=c_1c_2\cdots c_n=\frac{2}{2+1}\times\frac{2^2}{2^2+1}\times\frac{2^{2^2}}{2^{2^2}+1}\times\cdots\times\frac{2^{2^{n-1}}}{2^{2^{n-1}}+1}=\frac{2^{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}}}{(2+1)(2^2+1)\cdots(2^{2^{n-1}}+1)}$

$=\frac{2^{2^n-1}}{(2-1)(2+1)(2^2+1)\cdots(2^{2^{n-1}}+1)}=\frac{2^{2^n-1}}{(2^2-1)(2^2+1)\cdots(2^{2^{n-1}}+1)}=\frac{2^{2^n-1}}{2^{2^n}-1}$， ………………… 7 分

而注意到 $b_n=\frac{2^{2^{n-1}}}{2^{2^n}-1}=\frac{(2^{2^{n-1}}+1)-1}{(2^{2^{n-1}}-1)(2^{2^{n-1}}+1)}=\frac{1}{2^{2^{n-1}}-1}-\frac{1}{2^{2^n}-1}$， ………………………… 9 分

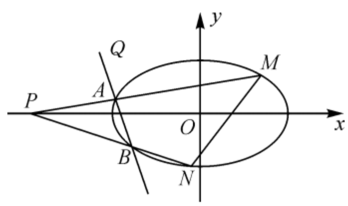
故 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^{2^2}-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{2^{n-1}}-1}-\frac{1}{2^{2^n}-1}\right)=1-\frac{1}{2^{2^n}-1}$， ………

……………………………………………………………………………… 10 分

所以 $S_n+2T_n=1-\frac{1}{2^{2^n}-1}+2\times\frac{2^{2^n-1}}{2^{2^n}-1}=1-\frac{1}{2^{2^n}-1}+\frac{2^{2^n}}{2^{2^n}-1}=1+\frac{2^{2^n}-1}{2^{2^n}-1}=2$，得证！ ……………… 12 分

【命题立意】本题为数列递推与数列求和求积综合问题，主要考查学生对于非常规数列递推式的处理能力以及数列求和求积过程中的化简能力，通过对于不同的数列求和求积结构，进行有针对性地化简，在分析问题过程中培养学生数学抽象，数学运算，转化化归的能力.

21.【解析】(1)由椭圆 C 的长轴长为 4 可知 $a=2$， ………………………… 1 分



又椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $c=1,b=\sqrt{3}$， ………………… 3 分

因此椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$； ………………………………… 4 分

(2)直线 MN 的斜率为定值，定值为 1，

证明：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x_3,y_3),N(x_4,y_4)$，

$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PM},\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{PN}$，

由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PM}$，有 $\begin{cases}-4=\frac{x_1+\lambda x_3}{1+\lambda},\\0=\frac{y_1+\lambda y_3}{1+\lambda},\end{cases}$ …………………………………………… 5 分

因为 A,M 在椭圆上，

所以 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1,\frac{x_3^2}{4}+\frac{y_3^2}{3}=1$，因此 $1-\lambda^2=\left(\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}\right)-\lambda^2\left(\frac{x_3^2}{4}+\frac{y_3^2}{3}\right)$，

整理得 $1-\lambda^2=\frac{x_1^2-\lambda^2x_3^2}{4}+\frac{y_1^2-\lambda^2y_3^2}{3}=\frac{x_1^2-\lambda^2x_3^2}{4}$, ………………………………………………………… 6 分

即 $4=\frac{x_1^2-\lambda^2x_3^2}{1-\lambda^2}=\frac{x_1+\lambda x_3}{1+\lambda}\cdot\frac{x_1-\lambda x_3}{1-\lambda}$,因此$\frac{x_1-\lambda x_3}{1-\lambda}=-1$, ………………………………………………… 7 分

联立$\frac{x_1+\lambda x_3}{1+\lambda}=-4$,解之有$\begin{cases}x_1=-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\lambda,\\ x_3=-\frac{5}{2}-\frac{3}{2\lambda},\end{cases}$同理$\begin{cases}x_2=-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\mu,\\ x_4=-\frac{5}{2}-\frac{3}{2\mu},\end{cases}$ ………………………………… 8 分

又因为直线 AB 过定点 $Q\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$,所以$\frac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2+\frac{5}{2}}=\frac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1+\frac{5}{2}}$, ………………………………………… 9 分

将 $y_1+\lambda y_3=0$,$y_2+\mu y_4=0$,$x_1=-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\lambda$,$x_2=-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\mu$ 代入, ………………………………………… 10 分

有$\frac{-\mu y_4-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}\mu}=\frac{-\lambda y_3-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}\lambda}$,整理得 $y_4-y_3=\frac{3}{2\lambda}-\frac{3}{2\mu}$, ……………………………………………………… 11 分

又 $x_4-x_3=\left(-\frac{5}{2}-\frac{3}{2\mu}\right)-\left(-\frac{5}{2}-\frac{3}{2\lambda}\right)=\frac{3}{2\lambda}-\frac{3}{2\mu}$,所以 $k_{MN}=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}=1$.

综上,直线 MN 的斜率为定值 1. ………………………………………………………………………………… 12 分

【命题立意】本题为椭圆中定点定值问题,主要考查学生逻辑推理、数学运算等数学学科核心素养,在分析问题的过程中培养学生数形结合、转化与化归等能力.

22.**【解析】**(1)易知 $f(1)-a=0$,因此函数 $y=f(x)-a$ 必有一个零点 $x=1$,

由 $f(x)=\ln x+ax(a\in\mathbf{R})$有 $f'(x)=\frac{1}{x}+a=\frac{1+ax}{x}(x>0)$, ………………………………………………… 1 分

当 $a\geqslant0$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

此时函数 $y=f(x)-a$ 恰有一个零点; ……………………………………………………………………… 2 分

当 $a<0$ 时,令 $f'(x)>0$ 有 $0<x<-\frac{1}{a}$,令 $f'(x)<0$ 有 $x>-\frac{1}{a}$,

因此函数 $f(x)$在$\left(0,-\frac{1}{a}\right)$上单调递增,在$\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减,

当 $a=-1$ 时,函数 $y=f(x)-a$ 恰有一个零点; …………………………………………………………… 3 分

当 $a<0$ 且 $a\neq1$ 时,$f\left(-\frac{1}{a}\right)>f(1)=a$,

又 $x\to0$ 时,$\ln x\to-\infty$,$ax\to0$,$f(x)\to-\infty$, ……………………………………………………………… 4 分

由一次函数 $y=-ax(a<0)$的增长速度远远大于对数函数 $y=\ln x$ 的增长速度可知,当 $x\to+\infty$时,$f(x)\to-\infty$,

…… 5 分

因此,当 $a<0$ 时,函数 $y=f(x)-a$ 恰有两个零点.

综上:当 $a<0$ 且 $a\neq-1$ 时,函数 $y=f(x)-a$ 恰有两个零点,

当 $a\geqslant0$ 或 $a=-1$ 时,函数 $y=f(x)-a$ 恰有一个零点; ……………………………………………… 6 分

(2)由(1)可知,$-1<a<0$ 且函数 $y=f(x)-a$ 必有一个零点 1,不妨令 $x_1=1$, ……………………………… 7 分

函数 $f(x)$在$\left(0,-\frac{1}{a}\right)$上单调递增,在$\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减,

$f'\left(-\frac{2}{a}\right)=\frac{a}{2}$，因此 $f(x)$ 在点 $\left(-\frac{2}{a},f\left(-\frac{2}{a}\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=\frac{a}{2}x+\ln\left(-\frac{2}{a}\right)-1$， ………………… 8 分

令 $a=\frac{a}{2}x+\ln\left(-\frac{2}{a}\right)-1$，解之有 $x_3=2+\frac{2}{a}-\frac{2}{a}\ln\left(-\frac{2}{a}\right)$， ………………………………………………… 9 分

当 $-1<a<0$ 时，$1<-\frac{1}{a}<-\frac{2}{a}$，易知 $x_2<x_3$，

所以要证明 $|x_1-x_2|<\left(\frac{2}{a}+1\right)^2$，只需证明 $x_3-1<\left(\frac{2}{a}+1\right)^2$， ………………………………………… 10 分

即证明 $1+\frac{2}{a}-\frac{2}{a}\ln\left(-\frac{2}{a}\right)<\left(\frac{2}{a}+1\right)^2$；

令 $t=-\frac{2}{a}(t>2)$，则 $1+\frac{2}{a}-\frac{2}{a}\ln\left(-\frac{2}{a}\right)<\left(\frac{2}{a}+1\right)^2$ 等价于 $1-t+t\ln t<(t-1)^2$， ………………… 11 分

令 $g(t)=1-t+t\ln t-(t-1)^2=t\ln t+t-t^2=t(\ln t+1-t)$，

令 $h(t)=\ln t+1-t$，$h'(t)=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}<0$，因此函数 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

因为 $h(t)=\ln t+1-t<h(1)=0$，故 $g(t)<0$，

所以当 $-1<a<0$ 时，$|x_1-x_2|<\left(\frac{2}{a}+1\right)^2$； ………………………………………………………… 12 分

【命题立意】本题考查应用导数研究函数的单调性和证明不等式，考查学生的逻辑推理以及数学运算能力.