湖南师大附中2024届高三月考试卷(三)

数　　学

命题人:张汝波 苏萍 柳叶 杨章远　审题人:高三备课组

时量:120分钟　满分:150分

得分:______

学号______ 姓名______ 班级______ 学校______

密 封 线 内 不 要 答 题

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|x^2-14x-15<0\}$,$B=\{x|\sqrt{x+1}\in\mathbf{Q}\}$,则 $A\cap B$ 中的元素个数为

A. 2　B. 3　C. 4　D. 5

2. 已知复数 $z=\dfrac{10-5ai}{1-2i}$(i为虚数单位)的实部与虚部之和为4,则在复平面内 z 对应的点位于

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

3. 若平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=3$,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=4$,则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$

A. $\dfrac{1}{4}$　B. $\dfrac{1}{3}$　C. $-\dfrac{1}{4}$　D. $-\dfrac{1}{3}$

4. "$\sin 2\theta>0$ 且 $\cos\theta<0$"是"θ 为第三象限角"的

A. 充要条件　B. 必要不充分条件

C. 充分不必要条件　D. 既不充分也不必要条件

5. 将函数 $y=\log_2(2x+2)$ 的图象向下平移1个单位长度,再向右平移1个单位长度,得到函数 $g(x)$ 的图象,则 $g(x)=$

A. $\log_2(2x+1)-1$　B. $\log_2(2x+1)+1$

C. $\log_2 x-1$　D. $\log_2 x$

6. 若 $(2x-1)^{10}=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$,则 $a_1+2a_2+\cdots+10a_{10}=$

A. 3^{10}　B. $3^{10}-1$　C. 20×3^9　D. 10×3^9

7. 焦点为 F 的抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的对称轴与准线交于点 A,点 B 在抛物线 C 上且在第一象限,在 $\triangle ABF$ 中,$3\sin\angle AFB=4\sin\angle FAB$,则直线 BF 的斜率为

A. $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$　B. $\dfrac{4}{3}$　C. 1　D. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

8. 已知等比数列$\{a_n\}$单调递增，且a_1, a_2, a_3-1成等差数列，则当a_{11}取最小值时，集合$A=\{a_n | a_n \in \mathbf{N}^*\}$中的元素之和为

A. 36　　B. 42　　C. 54　　D. 61

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 抽取S市某届马拉松比赛前5000名的部分跑者成绩绘制如下频数分布表（单位：分钟）：

分组	[150,200)	[200,250)	[250,300)	[300,350)	[350,400)	[400,450)
频数	20	60	160	140	80	40

则下列选项正确的是

A. 估计总体中成绩落在[150,400)分钟内的选手人数为4500

B. 这组数据平均数的估计值为307分钟

C. 这组数据第62百分位数的估计值为325分钟

D. 在由以上数据绘制的频率分布直方图中，各组长方形的高度之和为0.02

10. 已知曲线C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m}=1$($m<4$且$m\neq0$)，$A,B$分别为$C$与$x$轴的左、右交点，$P$为$C$上任意一点（不与$A,B$重合），则

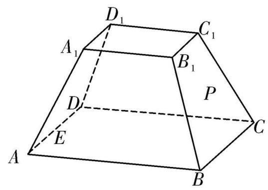
A. 若$m=-1$，则C为双曲线，且渐近线方程为$y=\pm2x$

B. 若P点坐标为$(1,n)$，则C为焦点在x轴上的椭圆

C. 若点F的坐标为$(\sqrt{4-m},0)$，线段PF与x轴垂直，则$|PF|=\frac{m}{2}$

D. 若直线PA,PB的斜率分别为k_1,k_2，则$k_1k_2=-\frac{m}{4}$

11. 如图，已知正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的上、下底面边长分别为2和4，侧棱长为$\sqrt{5}$，点E为棱AD的中点，点P在侧面BCC_1B_1内运动（包含边界），且EP与平面BCC_1B_1所成角的正切值为$2\sqrt{3}$，则



A. CP长度的最小值为$2\sqrt{2}-1$

B. 存在点P，使得$EP\perp PC$

C. 存在点P，使得$AP /\!/ EC_1$

D. 棱长为1.5的正方体可以在此空心棱台容器内部任意转动

12. 定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$满足$f(3-x)-f(3+x)=4x$，函数$f(2x+1)$的图象关于$(0,2)$对称，则

A. 8是$f(x)$的一个周期　　B. $f(2)=4$

C. $f(x)$的图象关于$(1,2)$对称　　D. $f(2025)=-4046$

选择题答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答案													

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若圆 $(x-a)^2+(y-1)^2=4$ 和圆 $x^2+y^2=1$ 恰有三条公切线，则实数 a $=$______.

14. 若 $3^q+\lambda\cdot3^{-q}\geqslant3$，则当 λ 取得最小值时，$q=$______.

15. 已知正△ABC 的边长为 2，点 P 为△ABC 所在平面内的动点，且 $PC=1$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围为______.

16. 在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，$BC=6$，$A_1B_1=A_1C_1=4\sqrt{2}$，$AA_1=5\sqrt{2}$，平面 $BB_1C_1C\perp$ 平面 ABC，则该三棱台外接球的体积为______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知△ABC 是边长为 2 的等边三角形，点 O 是△ABC 内一点，$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$，$\angle BOC=\frac{2\pi}{3}$，求 $\cos\angle BCO$ 和 OA.

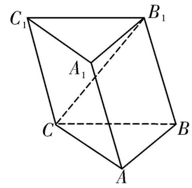
18.(12 分)

已知$\{a_n\}$是等比数列,满足 $a_1=2$,且 a_2,a_3+2,a_4 成等差数列,数列$\{b_n\}$满足 $b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n}b_n=2n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(2)设 $c_n=(-1)^n(a_n-b_n)$,求数列$\{c_n\}$的前 $2n$ 项和 S_{2n}.

19.(12 分)



如图所示,已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 1.

(1)从下面①②③中选择两个作为条件,证明另一个成立;

①$B_1C=\frac{\sqrt{6}}{2}$;②$\angle A_1B_1C$ 为直角;③平面 $ABC\perp$ 平面 ABB_1A_1.

(2)设点 P 是棱 BB_1 上一点. 在(1)中条件都成立的情况下,试确定点 P 的位置,使得直线 CP 与平面 ACC_1A_1 所成的角最大.

20.(12 分)

某种植物感染病毒 γ 极易死亡,当地生物研究所为此研发出了一种抗病毒 γ 的制剂. 现对 20 株感染了病毒 γ 的该植株样本进行喷雾试验测试药效. 测试结果分"植株死亡"和"植株存活"两个结果进行统计,并对植株吸收制剂的量(单位:毫克)进行统计. 规定植株吸收在 6 毫克及以上为"足量",否则为"不足量". 现对该 20 株植株样本进行统计,其中"植株存活"的 13 株,对制剂吸收量统计得下表. 已知"植株存活"但"制剂吸收不足量"的植株共 1 株.

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
吸收量(毫克)	6	8	3	8	9	5	6	6	2	7
编号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
吸收量(毫克)	7	5	10	6	7	8	8	4	6	9

(1)补全列联表中的空缺部分,依据 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,能否认为"植株的存活"与"制剂吸收足量"有关?

	吸收足量	吸收不足量	合计
植株存活		1	
植株死亡			
合计			20

(2)现假设该植物感染病毒 γ 后的存活日数为随机变量 X(X 可取任意正整数). 研究人员统计大量数据后发现:对于任意的 $k\in\mathbf{N}^*$,存活日数为$(k+1)$的样本在存活日数超过 k 的样本里的数量占比与存活日数为 1 的样本在全体样本中的数量占比相同,均等于 0.1,这种现象被称为"几何分布的无记忆性". 试推导 $P(X=k)(k\in\mathbf{N}^*)$的表达式,并求该植物感染病毒 γ 后存活日数的期望 $E(X)$的值.

附:$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$;当 n 足够大时,$n\times0.9^n\approx0$.

α	0.010	0.005	0.001
x_α	6.635	7.879	10.828

21.(12 分)

已知 F 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点，O 为坐标原点，T 为椭圆上任意一点，$|TF|$ 的最大值为 3，$\triangle TOF$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)点 P 是 y 轴正半轴上的一点，过点 F 和点 P 的直线 l 与椭圆 C 交于 M,N 两点. 求 $\frac{|PM|+|PN|}{|PF|}$ 的取值范围.

22.(12 分)

设函数 $f(x)=mx^2+(x+1)e^{-x}$,其中 $m\in\mathbf{R}$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;

(2)若 $f(x)$存在两个极值点,设极大值点为 a,b 为 $f(x)$的零点,求证:

$a-b\geqslant\ln 2$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。