

2023—2024 学年(上)南阳六校高一年级期中考试

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案 C

命题意图 本题考查集合的表示与运算.

解析 由题意可得 $\complement_{\mathbf{R}}B = \{x|x \geq -2\}$,所以 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}}B) = \{x|-2 \leq x < 3\}$.

2. 答案 B

命题意图 本题考查充分条件与必要条件的应用.

解析 选项 A,C,D 都既不是充分条件也不是必要条件,对于 B,由 $a < 0$ 且 $b < 0$ 可得 $a + b < 0$,反过来推不出,所以 B 符合条件.

3. 答案 D

命题意图 本题考查不等式的解法.

解析 由于关于 x 的不等式 $ax - b > 0$ 的解集是 $(-\infty, -1)$,所以 $\begin{cases} a < 0, \\ -a - b = 0, \end{cases}$ 则有 $b = -a$ 且 $a < 0$,则 $ax^2 +$

$bx > 0$ 等价于 $x(x + \frac{b}{a}) < 0$,解得 $0 < x < 1$,即不等式 $ax^2 + bx > 0$ 的解集为 $(0,1)$.

4. 答案 A

命题意图 本题考查幂函数和指数函数的性质.

解析 因为 $f(x) = (a^2 - a - 1)x^a$ 是幂函数,所以 $a^2 - a - 1 = 1$,解得 $a = 2$ 或 $a = -1$.当 $a = 2$ 时, $f(x) = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,当 $a = -1$ 时, $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,故 $a = 2$.此时 $g(x) = b^{x+2} - 1$,当 $x = -2$ 时, $g(-2) = 0$,即 $g(x)$ 的图象过定点 $(-2,0)$.

5. 答案 C

命题意图 本题考查函数的定义域.

解析 要使函数 $g(x)$ 有意义,则 $\begin{cases} 0 < 2^x \leq 4, \\ x - 1 \neq 0, \end{cases}$ 故 $x < 1$ 或 $1 < x \leq 2$,所以 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, 2]$.

6. 答案 A

命题意图 本题考查指数和对数的运算.

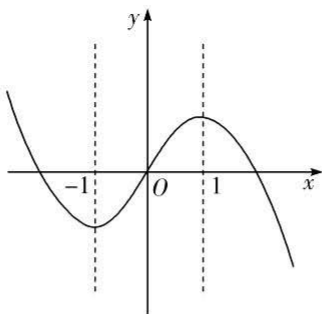
解析 因为 $b = (\frac{1}{3})^{-\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{3}} > 3$, $c = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a = \log_3 9 = 2\log_3 3 = 2$,所以 $c < a < b$.

7. 答案 D

命题意图 本题考查函数的奇偶性和单调性.

解析 由题意得 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, x \geq 0, \\ x^2 + 2x, x < 0, \end{cases}$ 画出函数 $f(x)$ 的大致图象,如图,观察图象可知,函数 $f(x)$ 的图象关

于原点对称,故函数 $f(x)$ 为奇函数,单调递减区间是 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$.



8. 答案 C

命题意图 本题考查偶函数的性质和不等式的解法.

解析 易知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(x)$ 为偶函数. 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 3^{1+x} - \frac{1}{1+x^2}$, 易知此时 $f(x)$ 单调递增, 所以 $f(x) < f(2x+1) \Rightarrow f(|x|) < f(|2x+1|)$, 所以 $|x| < |2x+1|$, 解得 $x < -1$ 或 $x > -\frac{1}{3}$.

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 答案 ABD

命题意图 本题考查不等式的性质.

解析 由 $a < b < 0$, 得 $|a| > |b|$, 则 $a^2 > b^2$, A 成立; 由 $a < b$ 两边同时乘以 b , 不等号反向, 得 $ab > b^2$, B 成立; 由 $a < b$ 两边同时除以 ab , 得 $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, C 不成立; 由 $a < b < 0$ 可得 $a+b < a < 0$, 同除以 $(a+b)a$, 可得 $\frac{1}{a+b} > \frac{1}{a}$, D 成立.

10. 答案 BC

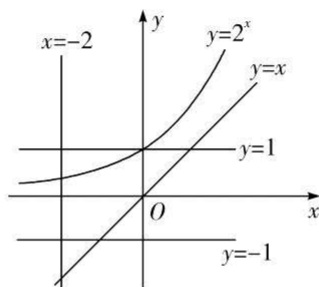
命题意图 本题考查函数的概念.

解析 A, D 中函数的定义域不同.

11. 答案 AD

命题意图 本题考查函数的图象与性质.

解析 分别作出相应的图象, 如图:



对于 A, 容易看出 $y=2^x$ 的图象上存在两点 $(-3, \frac{1}{8})$ 与 $(-1, \frac{1}{2})$ 到直线 $x=-2$ 的距离均为 1, 故 A 正确;

对于 B, $y=2^x$ 的图象在直线 $y=1$ 上方的部分仅存在一点 $(1, 2)$ 到直线 $y=1$ 的距离为 1, 在直线 $y=1$ 下方的部分满足 $0 < y < 1$, 到直线 $y=1$ 的距离均小于 1, 故不存在符合条件的两点, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $y=2^x > 0$, 故其图象上所有点到直线 $y=-1$ 的距离均大于 1, 故 C 错误;

对于 D, 利用几何知识可以算得点 $(0, 1)$ 到直线 $y=x$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, 由指数函数的图象可知, 在点 $(0, 1)$ 的

两边各存在一点到直线 $y=x$ 的距离为 1, 故 D 正确.

12. 答案 ABD

命题意图 本题考查指数的运算性质.

解析 对于 A, 因为 $2^a = 3^b = 6$, 所以 $(2^a)^b = 6^b$, $(3^b)^a = 6^a$, 所以 $2^{ab} = 6^b$, $3^{ab} = 6^a$, 所以 $2^{ab} \cdot 3^{ab} = 6^b \cdot 6^a$, 所以 $6^{ab} = 6^{a+b}$, 所以 $ab = a+b$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $ab = a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 又 $a \neq b$, 所以 $ab > 2\sqrt{ab}$, 所以 $ab > 4$, 所以 $a+b = ab > 4$, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $2^a = 3^b$, 所以 $4^a = 2^{2a} = 3^{2b} = 9^b > 8^b$, 故 C 错误;

对于 D, 设 $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(ab) = t$, 则 $2^t = ab > 4$, 所以 $t > 2$, 故 D 正确.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 答案 4

命题意图 本题考查集合的概念和运算.

解析 因为 $25 = 0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2$, 所以满足 $x^2 + y^2 = 25$ 的自然数对有 $(0, 5), (5, 0), (3, 4), (4, 3)$, 即 $A \cap B$ 中的元素有 4 个.

14. 答案 -2

命题意图 本题考查奇函数的概念.

解析 设函数 $g(x) = \frac{x^3}{x^2+2}$, 则 $g(x)$ 的最大值为 $M+1$, 最小值为 $m+1$, 容易判断 $g(x)$ 是奇函数, 所以 $(M+1) + (m+1) = 0$, 所以 $M+m = -2$.

15. 答案 $(1, +\infty)$

命题意图 本题考查函数的单调性.

解析 函数 $f(x) = \frac{ax-1}{x-1} = a + \frac{a-1}{x-1}$, 由 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单调递减, 得 $a-1 > 0$, 解得 $a > 1$.

16. 答案 $(-1, +\infty)$

命题意图 本题考查分段函数和不等式的解法.

解析 由题意知, 当 $x > 1$ 时, $2^x + 2^{x-1} > 1$ 恒成立; 当 $0 < x \leq 1$ 时, $2^x + x - 1 + 2 > 1$ 恒成立; 当 $x \leq 0$ 时, 由 $x + 2 + x - 1 + 2 > 1$, 解得 $x > -1$, 所以 $-1 < x \leq 0$. 综上, x 的取值范围是 $(-1, +\infty)$.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 命题意图 本题考查指数和对数的运算性质.

解析 (I) 原式 $= \left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{0.01} + \left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} - 2 + \frac{3}{16}$ (2分)

$= \frac{5}{4} + 100 + \frac{9}{16} - 2 + \frac{3}{16}$ (4分)

$= 100$ (5分)

(II) 原式 $= \log_2[2^2 \times (2^3)^2] + \log_3 \frac{18}{2} + \log_4 3 \times \log_3 4^2$ (7分)

$= \log_2(2^8) + \log_3 9 + \log_4 3 \times 2 \log_3 4$ (9分)

$= 8 + 2 + 2 = 12$ (10分)

18. 命题意图 本题考查集合的运算、充分条件与必要条件的判断.

解析 由 $x^2 - 7x + 6 \leq 0$ 得 $1 \leq x \leq 6$, 故 $A = \{x | 1 \leq x \leq 6\}$, (2分)

由 $x^2 - 2x + 1 - m^2 = 0$ 得 $x_1 = 1 - m, x_2 = 1 + m$,

因为 $m > 0$, 故 $B = \{x | 1 - m \leq x \leq 1 + m\}$ (4分)

(I) 若 $m = 1$, 则 $B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, 所以 $A \cap B = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$ (6分)

(II) 若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 成立的充分不必要条件, 则 $A \subsetneq B$, (8分)

则有 $\begin{cases} 1 - m \leq 1, \\ 1 + m \geq 6, \end{cases}$ 解得 $m \geq 5$, 此时满足 $A \subsetneq B$, (11分)

所以 m 的取值范围是 $[5, +\infty)$ (12分)

19. 命题意图 本题考查指数函数的性质, 函数与不等式的综合.

解析 (I) 因为 $f(x) = a^x$ 的图象经过点 $(4, 4)$,

所以 $a^4 = 4$, 又 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 所以 $a = \sqrt{2}$ (3分)

(II) 因为 $\sqrt{2} > 1$, 所以 $f(x) = (\sqrt{2})^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增. (4分)

又因为 $m^2 - 2m - (-2) = (m - 1)^2 + 1 > 0$, 所以 $m^2 - 2m > -2$, (6分)

所以 $f(-2) < f(m^2 - 2m)$ (7分)

(III) 当 $-3 \leq x \leq 3$ 时, $0 \leq |x - 1| \leq 4$, (9分)

所以 $(\sqrt{2})^0 \leq (\sqrt{2})^{|x-1|} \leq (\sqrt{2})^4$, 即 $1 \leq (\sqrt{2})^{|x-1|} \leq 4$, (11分)

所以 $g(x)$ 的值域为 $[1, 4]$ (12分)

20. 命题意图 本题考查一元二次不等式与二次函数.

解析 (I) 当 $m = 0$ 时, 显然 $-6 < 0$, 满足题意; (1分)

若 $m < 0$, 显然满足题意; (2分)

若 $m > 0$, 则需 $\Delta = m^2 - 4m(m - 6) > 0$, 解得 $0 < m < 8$ (4分)

综上, 实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 8)$ (6分)

(II) 由题可知, 当 $x \in [-2, 1]$ 时, $m(x^2 - x + 1) - 2 < 0$ 恒成立.

因为 $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$,

所以 $m(x^2 - x + 1) - 2 < 0$ 等价于 $m < \frac{2}{x^2 - x + 1}$ (8分)

因为 $y = \frac{2}{x^2 - x + 1} = \frac{2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$ 在区间 $[-2, 1]$ 上的最小值为 $\frac{2}{7}$, (10分)

所以只需 $m < \frac{2}{7}$ 即可,

所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty, \frac{2}{7})$ (12分)

21. 命题意图 本题考查函数模型的应用和二次函数的性质.

解析 (I) 当在甲城市投资 125 万元时, 在乙城市投资 75 万元,

所以总收益为 $2\sqrt{5 \times 125} - 8 + \frac{1}{4} \times 75 + 3 = 63.75$ (万元). (4分)

(II) 设在甲城市投资 x 万元, 则在乙城市投资 $(200 - x)$ 万元,

总收益为 $f(x) = 2\sqrt{5x} - 8 + \frac{1}{4}(200 - x) + 3 = -\frac{1}{4}x + 2\sqrt{5x} + 45$, (6分)

依题意得 $\begin{cases} x \geq 70, \\ 200 - x \geq 70, \end{cases}$ 解得 $70 \leq x \leq 130$.

故 $f(x) = -\frac{1}{4}x + 2\sqrt{5x} + 45 (70 \leq x \leq 130)$ (7分)

令 $t = \sqrt{x}$, 则 $t \in [\sqrt{70}, \sqrt{130}]$,

所以 $y = -\frac{1}{4}t^2 + 2\sqrt{5}t + 45, t \in [\sqrt{70}, \sqrt{130}]$, (8分)

因为该二次函数的图象开口向下, 且对称轴 $t = 4\sqrt{5} \in [\sqrt{70}, \sqrt{130}]$,

所以当 $t = 4\sqrt{5}$, 即 $x = 80$ 时, y 取得最大值 65, (11分)

所以当在甲城市投资 80 万元, 乙城市投资 120 万元时, 总收益最大, 且最大总收益为 65 万元. (12分)

22. 命题意图 本题考查函数的综合问题.

解析 (I) 因为 $f(x)$ 在定义域 \mathbf{R} 上是奇函数, 所以 $f(0) = 0$, 所以 $n = -1$ (1分)

又由 $f(-1) = -f(1)$, 可得 $m = 3$,

经检验知, 当 $m = 3, n = -1$ 时, 原函数是奇函数. (3分)

(II) 由 (I) 知 $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^{x+1} + 3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^x + 1}$, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数. (4分)

证明: 任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 设 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_2) - f(x_1) &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^{x_2} + 1} - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^{x_1} + 1} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3^{x_1} + 1} - \frac{1}{3^{x_2} + 1} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{3^{x_2} - 3^{x_1}}{(3^{x_1} + 1)(3^{x_2} + 1)} \right], \end{aligned}$$
 (6分)

因为 $x_1 < x_2$, 所以 $3^{x_2} - 3^{x_1} > 0$, 又 $(3^{x_1} + 1)(3^{x_2} + 1) > 0$, 所以 $f(x_2) - f(x_1) > 0$,

即 $f(x_2) > f(x_1)$, 所以函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数. (7分)

(III) 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以不等式 $f(kx^2) + f(2x - 1) > 0$ 等价于 $f(kx^2) > -f(2x - 1) = f(1 - 2x)$,

因为 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数, 所以 $kx^2 > 1 - 2x$, (9分)

即对任意 $x \in \left[\frac{1}{3}, 2 \right]$, 都有 $k > \frac{1 - 2x}{x^2}$ 成立. (10分)

设 $g(x) = \frac{1 - 2x}{x^2} = \left(\frac{1}{x} \right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{x}$, 令 $t = \frac{1}{x}, t \in \left[\frac{1}{2}, 3 \right]$, 则有 $g(t) = t^2 - 2t, t \in \left[\frac{1}{2}, 3 \right]$,

所以 $g(x)_{\max} = g(t)_{\max} = g(3) = 3$, (11分)

所以 $k > 3$, 即 k 的取值范围为 $(3, +\infty)$ (12分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

