参考答案

普高联考 2023—2024 学年高三测评(三)

数　学

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	A	B	B	C	D	D

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

题号	9	10	11	12
答案	AC	BCD	ABD	BC

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 四　**14.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$或$\frac{\sqrt{5}}{5}$　**15.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　**16.** 2

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (1)因为 E 为 AC 的中点,D 为边 BC 上靠近点 B 的三等分点,所以$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB},\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}$, ………………… 1 分

则$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BD}$ ………………………………………… 2 分

$=\overrightarrow{AB}+3(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}$, ………………………………………… 3 分

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD})=-2\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$. ………………………… 5 分

(2)因为$4\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$,

则$\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\times 2\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$, ………………………………………… 8 分

所以$2\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AE})$,即$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EN}$, ………………………… 9 分

所以 B,N,E 三点共线. ………………………………………………………… 10 分

18. (1)因为$z+\bar{z}=6$,所以$2(m+2)=6$,解得 $m=1$. ………………………………… 4 分

(2)由(1)知 $m=1$,则 $z=3-\mathrm{i}$,

所以 $3-4\mathrm{i}$ 是实系数一元二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的一个根,

即$(3-4\mathrm{i})^2+a(3-4\mathrm{i})+b=0$,整理得 $3a+b-7-(24+4a)\mathrm{i}=0$,

所以 $3a+b-7=0,24+4a=0$,解得 $a=-6,b=25$.

故一元二次方程为 $x^2-6x+25=0$. ………………………………………………… 8 分

设 $z_1=p+q\mathrm{i}(p,q\in\mathbf{R}$ 且 $q\neq 0)$为该方程的另一复数根,

则$(p+q\mathrm{i})^2-6(p+q\mathrm{i})+25=0$,整理得 $p^2-q^2-6p+25+(2pq-6q)\mathrm{i}=0$,

所以 $p^2-q^2-6p+25=0,2pq-6q=0$,因为 $z_1\neq 3-4\mathrm{i}$,所以 $p=3,q=4$, ………………… 11 分

故另一复数根为 $3+4\mathrm{i}$. ………………………………………………………… 12 分

19. (1)选择条件①:

因为 $\cos A=\frac{2c-a}{2b}$,在△ABC 中,

由余弦定理可得$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2c-a}{2b}$, ………………………………………… 2 分

即 $a^2+c^2-b^2=ac$,

则 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$, ………………………………………… 5 分

因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………… 6 分

选择条件②：
因为 $b\cos C=(2a-c)\cos B$，在 $\triangle ABC$ 中，
由正弦定理可得 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=2\sin A\cos B$，…… 2 分
即 $\sin(B+C)=2\sin A\cos B$，则 $\sin A=2\sin A\cos B$，
因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A\neq 0$，则 $\cos B=\frac{1}{2}$，…… 5 分
因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. …… 6 分
(2)因为 $B=\frac{\pi}{3}$，所以 $A+C=\frac{2\pi}{3}$，则 $\cos(A+C)=-\frac{1}{2}$，…… 7 分
即 $\cos A\cos C-\sin A\sin C=-\frac{1}{2}$，…… 9 分
又 $\cos A\cos C=-\frac{1}{8}$，
所以 $\sin A\sin C=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$. …… 10 分
因为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R=2$，
所以由正弦定理可得 $\sin A\sin C=\frac{a}{4}\cdot\frac{c}{4}=\frac{3}{8}$，所以 $ac=6$. …… 12 分

20. (1)由题图可知 $\begin{cases}A+B=0.02,\\-A+B=0,\end{cases}$
解得 $A=0.01$，$B=0.01$，
由 $\frac{T}{2}=4-1=3$，解得 $T=6$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{3}$，…… 3 分
当 $x=1$ 时，$y=0.02$，
所以 $0.01\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)+0.01=0.02$，即 $\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)=1$，
所以 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，
又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，…… 5 分
所以 $f(x)=0.01\sin(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6})+0.01$. …… 6 分
(2)令 $0.015\leqslant f(x)\leqslant 0.02$，
得 $0.015\leqslant 0.01\sin(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6})+0.01\leqslant 0.02$，
即 $\frac{1}{2}\leqslant\sin(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6})\leqslant 1$，
所以 $\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，…… 9 分
解得 $6k\leqslant x\leqslant 6k+2,k\in\mathbf{Z}$，
当 $k=0$ 时，$0\leqslant x\leqslant 2$，…… 11 分
所以这种 S 型螺纹丝杠旋铣能制作出符合要求的钢筋的比例为 $\frac{2}{T}=\frac{1}{3}$. …… 12 分

21. (1)因为 $\frac{\cos 2\angle BAC-1}{\sin 2\angle BAC}=\tan(\angle ACB+\frac{\pi}{4})$，
所以 $\frac{-\sin\angle BAC}{\cos\angle BAC}=\frac{\tan\angle ACB+1}{1-\tan\angle ACB}$，即 $\frac{-\sin\angle BAC}{\cos\angle BAC}=\frac{\sin\angle ACB+\cos\angle ACB}{\cos\angle ACB-\sin\angle ACB}$，…… 2 分
整理得 $\sin(\angle BAC+\angle ACB)=-\cos(\angle BAC+\angle ACB)$，即 $\sin\angle ABC=\cos\angle ABC$，
因为 $\angle ABC\in(0,\pi)$，所以 $\angle ABC=\frac{\pi}{4}$. …… 4 分
(2)因为 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{PC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PF}$，

所以 A,C 分别是 PD,PF 的中点,故 $DF=2AC=2\sqrt{2}$. ………… 5 分

在 $\triangle DEF$ 中, $DF=2\sqrt{2}$, $\angle DEF=\frac{\pi}{4}$,

故 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}DE\cdot EF\sin\angle DEF=\frac{\sqrt{2}}{4}DE\cdot EF$. ………… 7 分

由余弦定理得 $\cos\angle DEF=\frac{DE^2+EF^2-DF^2}{2DE\cdot EF}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

即 $\sqrt{2}DE\cdot EF=DE^2+EF^2-8\geqslant 2DE\cdot EF-8$,

即 $DE\cdot EF\leqslant\frac{8}{2-\sqrt{2}}=8+4\sqrt{2}$, 当且仅当 $DE=EF$ 时,等号成立. ………… 10 分

故 $S_{\triangle DEF}=\frac{\sqrt{2}}{4}DE\cdot EF\leqslant 2+2\sqrt{2}$,

所以 $\triangle DEF$ 面积的最大值为 $2+2\sqrt{2}$. ………… 12 分

22. (1) 不存在,理由如下:

要证存在 x,使得 $f(x)>-2e(e^{\sin x-1}-\frac{1}{2})$,

即证存在 x,使得 $\ln(\sin x)-e^{\sin x}>-2e^{\sin x}+e$,

即证存在 x,使得 $\ln(\sin x)+e^{\sin x}>e$,

令 $h(x)=\ln(\sin x)+e^{\sin x}, x\in(0,\frac{\pi}{2}]$,

即证 $h(x)_{max}>e$. ………… 2 分

因为 $h'(x)=\cos x(\frac{1}{\sin x}+e^{\sin x})\geqslant 0$,

所以 $h(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增,

故 $h(x)_{max}=h(\frac{\pi}{2})=e$, ………… 4 分

所以不存在 x,使得 $f(x)>-2e(e^{\sin x-1}-\frac{1}{2})$ 成立. ………… 5 分

(2) 因为 $f(x)=\ln(\sin x)-e^{\sin x}, x\in(0,\frac{\pi}{2}]$,

所以 $f'(x)=\cos x(\frac{1}{\sin x}-e^{\sin x})$, ………… 6 分

令 $t=\sin x, t\in(0,1]$, $g(t)=\frac{1}{t}-e^t$,

则 $g'(t)=\frac{-1-e^tt^2}{t^2}<0$,所以 $g(t)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减,

因为 $g(\frac{1}{2})=2-\sqrt{e}>0$, $g(1)=1-e<0$,

所以存在 $t_0\in(\frac{1}{2},1)$,使得 $g(t_0)=0$. ………… 9 分

则在区间 $(0,t_0)$ 上, $g(t)>0$,在区间 $(t_0,1]$ 上, $g(t)<0$,其中 t_0 为 $\frac{1}{t}=e^t$ 的实根. ………… 10 分

因为 $y=\sin x$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增,

所以对任意 $t_0\in(\frac{1}{2},1)$,存在唯一 $x_0\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$,使得 $t_0=\sin x_0$,

即在区间 $(0,x_0)$ 上, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,

在区间 $(x_0,\frac{\pi}{2}]$ 上, $f(x)$ 单调递减,

其中 x_0 为 $\frac{1}{\sin x}=e^{\sin x}$ 的实数根. ………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。