天壹

三湘名校教育联盟·2023年下学期高二期中联考·数学

参考答案、提示及评分细则

1.【答案】C

【解析】因为 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid(x+4)(x-3)<0\}=\{-3,-2,-1,0,1,2\}$，又 $B=\{x\mid y=\log_2(|x|-2)\}=\{x\mid x>2$ 或 $x<-2\}$，$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，所以 $(\complement_{\mathbf{R}}B)\cap A=\{-2,-1,0,1,2\}$，故选 C.

2.【答案】A

【解析】由 $\overline{z}(2+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$ 可得 $\overline{z}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{(1-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$，所以 $z=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$，对应点为 $\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{3}{5}\right)$，在第一象限. 故选 A.

3.【答案】C

【解析】由已知得，双曲线的焦点在 y 轴上，双曲线的焦距 $2c=4\sqrt{5}$，解得 $c=2\sqrt{5}$，

双曲线的实轴长为 $2a=4$，解得 $a=2$，则 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{20-4}=4$，

即双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{a}{b}x=\pm\dfrac{1}{2}x$. 故选 C.

4.【答案】D

5.【答案】B

【解析】由题意 $\begin{cases}y_1=kx_1+2023,\\ y_2=kx_2+2023,\end{cases}$ 则 $x_1y_2-x_2y_1=x_1(kx_2+2023)-x_2(ky_1+2023)=2023(x_1-x_2)\neq 0$，

(直线 $y=kx+2023$ 的斜率存在，$\therefore x_1\neq x_2$)，故 $l_1:x_1x+y_1y=1$ 与 $l_2:x_2x+y_2y=1$ 相交，$\therefore$ 方程组总有唯一解. A，D 错误，B 正确；

若 $\begin{cases}x=1,\\ y=2\end{cases}$ 是方程组的一组解，则 $\begin{cases}x_1+2y_1=1,\\ x_2+2y_2=1,\end{cases}$ 则点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 在直线 $x+2y=1$，即 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ 上，但已知这两个点在直线 $y=kx+2023$ 上，这两条直线不是同一条直线，$\therefore\begin{cases}x=1,\\ y=2\end{cases}$ 不可能是方程组的一组解，C 错误. 故选 B.

6.【答案】D

【解析】取 BC 中点为 H，因为 $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HB}$，$\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HC}$，

所以 $\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GH}^2-\overrightarrow{HC}^2=\overrightarrow{GH}^2-1$，

又 $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OH}$，则 $\overrightarrow{GH}^2=\overrightarrow{GO}^2+\overrightarrow{OH}^2+2\overrightarrow{GO}\cdot\overrightarrow{OH}$，又正方体的棱长为 2，则正方体的内切球半径为 1，则 $|\overrightarrow{GO}|=1$，$|\overrightarrow{OH}|=\sqrt{2}$，所以 $\overrightarrow{GH}^2=3+2\sqrt{2}\cos\langle\overrightarrow{GO},\overrightarrow{OH}\rangle$，

所以 $\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GH}^2-1=2+2\sqrt{2}\cos\langle\overrightarrow{GO},\overrightarrow{OH}\rangle$，

所以当 $\overrightarrow{GO}$，$\overrightarrow{OH}$ 反向时，$\cos\langle\overrightarrow{GO},\overrightarrow{OH}\rangle=-1$，$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}$ 有最小值为 $2-2\sqrt{2}$；

当 $\overrightarrow{GO}$，$\overrightarrow{OH}$ 同向时，$\cos\langle\overrightarrow{GO},\overrightarrow{OH}\rangle=1$，$\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}$ 有最大值为 $2+2\sqrt{2}$. 故选 D.

7.【答案】D

【解析】由条件可知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. 存在 $x\in[0,1]$ 使得 $f(1-ax-x^2)<f(2-a)$ 成立等价于存在 $x\in[0,1]$ 使得不等式 $1-ax-x^2>2-a$ 成立. 由 $1-ax-x^2>2-a$ 得 $(1-x)a>x^2+1$，

$\because x\in[0,1]$，$\therefore 1-x\geqslant 0$，$\therefore$ ①当 $x=1$ 时，$0>2$ 不成立；②当 $x\in[0,1)$ 时，$a>\dfrac{x^2+1}{1-x}$ 有解.

求当 $x\in[0,1)$ 时，函数 $y=\dfrac{x^2+1}{1-x}$ 的最小值.

令 $t=1-x(t\in(0,1])$，则 $y=\dfrac{x^2+1}{1-x}=\dfrac{(1-t)^2+1}{t}=t+\dfrac{2}{t}-2$，

而函数 $y=t+\frac{2}{t}-2$ 是 $(0,1]$ 上的减函数，所以当且仅当 $t=1$，即 $x=0$ 时，$y_{\min}=1$.

故 $a>1$，故选 D.

8.【答案】A

【解析】依题意，$M(a,0)$，$N(0,b)$. 点 M 为 $\triangle NAB$ 的重心时，AB 中点 $P\left(\frac{3a}{2},-\frac{b}{2}\right)$.

设 $B(x_1,y_1)$，$A(x_2,y_2)$，则 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1$. 两式作差得：$k_{BA}\cdot k_{OP}=\frac{b^2}{a^2}$. 其中，$k_{OP}=-\frac{b}{3a}$.

又因为 B,A,F,P 四点共线，所以 $k_{BA}=k_{FP}=\frac{\frac{b}{2}}{c-\frac{3a}{2}}$. 故 $\frac{\frac{b}{2}}{c-\frac{3a}{2}}\cdot\frac{-b}{3a}=\frac{b^2}{a^2}$，解得 $3c=4a$，故 $e=\frac{4}{3}$. 故选 A.

9.【答案】BD

【解析】对于 A，由 $kx-y+2k+1=0$ 可得，$k(x+2)-y+1=0$，
令 $x+2=0$，即 $x=-2$，此时 $y=1$，所以直线 l 恒过定点 $(-2,1)$，A 错误；
对于 B，因为定点 $(-2,1)$ 到圆心的距离为 $\sqrt{4+1}=\sqrt{5}<2\sqrt{2}$，
所以定点 $(-2,1)$ 在圆内，所以直线 l 与圆 O 相交，B 正确；
对于 C，因为直线 $l_0: x-2y+4=0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$，所以直线 l 的斜率为 $\frac{1}{2}$，
此时直线 l 的方程为 $x-2y+4=0$，直线 l 与直线 l_0 重合，故 C 错误；
对于 D，设直线 l 恒过定点 $A(-2,1)$，圆心到直线 l 的最大距离为 $|OA|=\sqrt{5}$，
此时直线 l 被圆 O 截得的弦长最短为 $2\sqrt{8-5}=2\sqrt{3}$，D 正确；故选 BD.

10.【答案】AD

【解析】对于 A，若 $f(x)$ 的最小正周期为 π，则 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$，故 A 正确；

对于 B，若 $\omega=1$，则 $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，$x=\frac{2\pi}{3}$ 时，$f(x)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=1$，故 B 错误；

对于 C，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi\omega}{2}-\frac{\pi}{6}\right]$，因为 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，则 $-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi\omega}{2}-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$，解得 $0<\omega\leqslant\frac{4}{3}$，故 C 错误；

对于 D，$x\in[0,2\pi]$ 时，$\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},2\pi\omega-\frac{\pi}{6}\right]$，若 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上恰有 2 个零点，

则 $\pi\leqslant 2\pi\omega-\frac{\pi}{6}<2\pi$，解得 $\frac{7}{12}\leqslant\omega<\frac{13}{12}$，故 D 正确. 故选 AD.

11.【答案】ACD

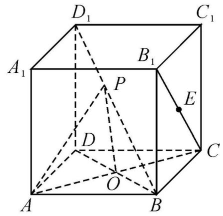
【解析】依题意，$p=2$.
对于 A 选项，当 B,C,F 三点共线时，BC 为焦点弦. 通径(垂直于对称轴的焦点弦)最短，最短为 $2p$，故 A 正确；
对于 B 选项，$|BF|+|CF|\geqslant|BC|=12$(当且仅当 B,C,F 三点共线时等号成立)，即 $x_B+x_c+2\geqslant 12$，故 $x_M\geqslant 5$，所以点 M 到 y 轴距离的最小值为 5，B 错误；

对于 C 选项，依题意，BC 为焦点弦且 $2|BF|=|CF|$. 不妨设直线 BC 的倾斜角 α 为锐角，则 $|BF|=\frac{p}{1+\cos\alpha}$，$|CF|=\frac{p}{1-\cos\alpha}$，解得 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$，故 $S=\frac{p^2}{2\sin\alpha}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故 C 正确；

对于 D 选项，设直线 $BC: x=my+n$，$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，与抛物线方程联立，得：$y^2-4my-4n=0$. 由韦达定理有：$y_1+y_2=4m$，$y_1\cdot y_2=-4n$. 依题意 $\frac{y_1-2}{x_1-1}\cdot\frac{y_2-2}{x_2-1}=-1$. 即 $(y_1-2)(y_2-2)+(my_1+n-1)(my_2+n-1)=0$，整理得：$(m^2+1)y_1y_2+(mn-m-2)(y_1+y_2)+(n-1)^2+4=0$. 代入韦达定理可得：$(n-3)^2=4(m+1)^2$，解得 $n=\pm 2(m+1)+3$，其中 $n=2(m+1)+3$ 时，直线过定点 $(5,-2)$，$n=-2(m+1)+3$ 时，直线过点 A，不符合题意，故直线 BC 过定点 $P(5,-2)$，点 A 到直线 BC 的距离最大值为 $|AP|=4\sqrt{2}$. D 正确. 故选 ACD.

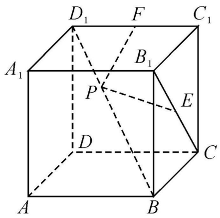
12.【答案】ACD

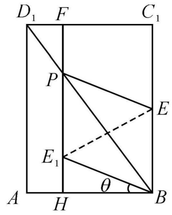
【解析】对于 A 选项，平面 AEC 即为平面 AB_1C，易知 A 正确；



对于选项 B：如图，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 OP，知 $AO\perp$ 平面 BDD_1B_1，所以 $\angle APO$ 即为 AP 与面 BDD_1B_1 所成角，所以 $\sin\angle APO=\dfrac{AO}{AP}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{AP}$，由 P 在 D_1B 上知 $AP\in\left[\dfrac{\sqrt{6}}{3},\sqrt{2}\right]$，所以 $\sin\angle APO\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$，因为 $\angle APO\in(0°,90°)$，所以 $\angle APO$ 的范围是 $[30°,60°]$，即直线 AP 与平面 BDD_1B_1 所成角的范围是 $[30°,60°]$，故 B 错误；

对于 C 项，把问题转化为在平面 ABC_1D_1 内求点 P 使得 $PE+PF$ 最小，如图，作点 E 关于线段 D_1B 的对称点 E_1，过点 E_1 作 D_1C_1，AB 的垂线，垂足分别为 F 和 H，





则 $PE+PF\geqslant E_1F$，设 $\angle E_1BA=\theta$，则 $\sin\theta=\sin(\angle ABD_1-\angle C_1BD_1)=\dfrac{1}{3}$，故 $E_1H=BE_1\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$，故 $E_1F=\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{6}=\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$.

对于 D 项，当 $\mu=\dfrac{2}{3}$ 时，$P\in$ 平面 AB_1C 且 A，P，E 三点共线. 此时 $PE\perp B_1C$，$PE\perp BD_1$，即此时 P 到直线 B_1C 的距离最小，最小值为 $\dfrac{1}{3}AE=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. 故选 ACD.

13.【答案】$(x+1)^2+(y+1)^2=2$

【解析】过 O 作直线 $x+y+4=0$ 的垂线，垂足为 A. 当 OA 为直径时，圆 C 的面积最小.

O 到直线 $x+y+4=0$ 的距离 $d=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

可知半径 $r=\sqrt{2}$，圆心 (a,b) 在直线 $x-y=0$ 上，且 $a^2+b^2=2$，

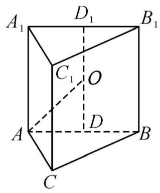
解得 $a=-1$，$b=-1$，所以求圆的方程为 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$.

14.【答案】$-\dfrac{7}{25}$

【解析】由 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{3}{5}$，得 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)=\dfrac{3}{5}$，两边平方得 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{7}{25}$.

所以 $\dfrac{\sin 2\alpha+2\sin^2\alpha}{1+\tan\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha}{1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha+\sin\alpha}=2\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{7}{25}$.

15.【答案】$\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi$



【解析】由已知该三棱柱是直三棱柱，且底面是直角三角形，$\angle ACB=90°$，

设 D，D_1 分别是 AB，A_1B_1 的中点，O 是 DD_1 中点，则 O 就是三棱柱外接球球心，

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times2\times1\times\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$V=Sh=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times DD_1=\sqrt{3}$，即 $DD_1=2$，

$OA=\sqrt{AD^2+DO^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. 所以 $V=\dfrac{4}{3}\pi\times OA^3=\dfrac{4}{3}\pi\times(\sqrt{2})^3=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi$.

16.【答案】$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

【解析】由图知 $e_1=\dfrac{c}{a_1}=\dfrac{|OF_1|}{|BF_1|}$，$e_2=\dfrac{c}{a_2}=\dfrac{2c}{2a_2}=\dfrac{2|OF_1|}{|PF_1|+|PF_2|}$，

则$\frac{e_1}{e_2}=\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2|BF_1|}$，设$\angle PF_1F_2=\theta$，

则$|PF_1|+|PF_2|=2c\cdot(\sin\theta+\cos\theta)$，$|BF_1|=\frac{c}{\cos\theta}$，

则$\frac{e_1}{e_2}=(\sin\theta+\cos\theta)\cdot\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

17.【解析】(1)设圆M方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

把A,B,C三点坐标代入可得：$\begin{cases}1+E+F=0,\\49+7D+F=0,\\16+81+4D+9E+F=0,\end{cases}$

解得$D=-8,E=-8,F=7$，

所以圆M方程是$x^2+y^2-8x-8y+7=0$，…… 3分

把D点坐标代入可得：$1+9-8-24+7<0$，故D在圆M内；…… 4分

(2)由(1)可知圆M：$(x-4)^2+(y-4)^2=25$，则圆心$M(4,4)$，半径$r=5$，

由题意可知圆心到直线l的距离是3，…… 6分

当直线l斜率存在时，设直线l方程为：$y=k(x-1)+3\Rightarrow kx-y+3-k=0$，

所以$\frac{|3k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=3$，解得$k=-\frac{4}{3}$，故直线$l$的方程为$4x+3y-13=0$；…… 8分

当直线l斜率不存在时，则直线l方程为：$x=1$，

此时圆心到直线l的距离是3，符合题意.

综上所述，直线l的方程为$4x+3y-13=0$或$x=1$. …… 10分

18.【解析】(1)$\overline{x}=45\times0.1+55\times0.26+65\times0.2+75\times0.3+85\times0.08+95\times0.06=66.8$，

所以本次考试成绩的平均分约为66.8；

因为成绩在$[40,70)$的频率为$(0.01+0.026+0.02)\times10=0.56$，成绩在$[40,80)$的频率为$0.56+0.03\times10=0.86$，所以第71百分位数位于$[70,80)$，设其为$x$，则$0.56+(x-70)\times0.03=0.71$，

解得$x=75$，所以第71百分位数为75；…… 5分

(2)第5组的人数为：$50\times0.008\times10=4$人，可记为A,B,C,D；

第6组的人数为：$50\times0.006\times10=3$人，可记为a,b,c；…… 7分

则从中任取2人，有$(A,B),(A,C),(A,D),(A,a),(A,b),(A,c),(B,C),(B,D),(B,a),(B,b),(B,c),(C,D),(C,a),(C,b),(C,c),(D,a),(D,b),(D,c),(a,b),(a,c),(b,c)$，共21种情况，…… 9分

其中至少有1人成绩优秀的情况有$(A,a),(A,b),(A,c),(B,a),(B,b),(B,c),(C,a),(C,b),(C,c),(D,a),(D,b),(D,c),(a,b),(a,c),(b,c)$，共15种情况.

…… 11分

所以至少有1人成绩优秀的概率$P=\frac{15}{21}=\frac{5}{7}$. …… 12分

19.【解析】(1)由正弦定理可得：$\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C-\sin A-\sin C=0$，…… 1分

又在三角形ABC中，$\sin A=\sin(B+C)$，

$\therefore\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C-\sin(B+C)-\sin C=0$，…… 2分

$\therefore\sqrt{3}\sin B\sin C-\cos B\sin C-\sin C=0$，…… 3分

又在三角形ABC中，$\sin C>0$，

$\therefore\sqrt{3}\sin B-\cos B=1$，$\therefore\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

$\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$；…… 5分

(2)由$2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$，可得$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$，

两边平方可得$\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{9}\overrightarrow{BC}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{BA}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$，…… 7分

即$1=\frac{1}{9}a^2+\frac{4}{9}c^2+\frac{4}{9}ac\cos B$，…… 8分

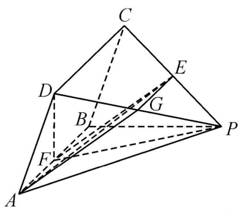
所以 $9=a^2+4c^2+2ac\geqslant 6ac$，当且仅当 $a=2c$ 时取“=”，…………………………………… 10 分

所以 $ac\leqslant\frac{3}{2}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

所以 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. …………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)证明：取 DP 的中点 G，连接 EG,GA，

∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，∴$AB/\!/CD$，…………………………………………………… 1 分



∵F 为 AB 中点，∴$AF/\!/CD$，且 $|AF|=\frac{1}{2}|CD|$，…………………………………… 2 分

∵G 为 DP 中点，E 为 CP 中点，

∴EG 为 $\triangle CDP$ 的中位线，∴$EG/\!/CD$，且 $|EG|=\frac{1}{2}|CD|$，……………………… 3 分

即 $AF/\!/EG$，且 $|AF|=|EG|$，

故四边形 $AFEG$ 是平行四边形，∴$EF/\!/AG$，…………………………………………………… 4 分

又 $AG\subset$ 平面 ADP，$EF\not\subset$ 平面 ADP，

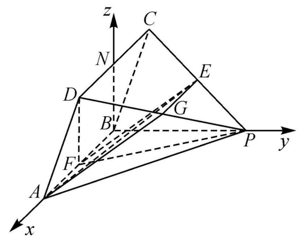
∴$EF/\!/$平面 ADP；…………………………………………………………………………………… 5 分

(2)取 CD 中点 N，连接 BN，∵点 D 在平面 ABP 内的投影为 F，∴$DF\perp$平面 ABP.

∵$PF=\sqrt{FB^2+BP^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$DP=3$，

∴$DF=\sqrt{DP^2-PF^2}=\sqrt{9-5}=2$，

∵$BN\perp CD$，则 $BN=DF=2$，…………………………………………………………………… 6 分



由于 BA,BN,BP 两两垂直，则可以点 B 为坐标原点建系，以 BA 为 x 轴，BP 为 y 轴，BN 为 z 轴，则有 $B(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$P(0,2,0)$，$F(1,0,0)$，$E\left(-\frac{1}{2},1,1\right)$，$D(1,0,2)$，

则 $\overrightarrow{DE}=\left(-\frac{3}{2},1,-1\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{3}{2},-1,-1\right)$，$\overrightarrow{FP}=(-1,2,0)$，……………… 7 分

设平面 DEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\frac{3}{2}x_1+y_1-z_1=0,\\ \frac{3}{2}x_1-y_1-z_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=3$，则 $x_1=2$，$z_1=0$，故 $\boldsymbol{n}_1=(2,3,0)$，……………………… 9 分

设平面 PEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\\ \overrightarrow{FP}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{3}{2}x_2-y_2-z_2=0,\\ -x_2+2y_2=0,\end{cases}$ 令 $y_2=1$，则 $x_2=2$，$z_2=2$，故 $\boldsymbol{n}_2=(2,1,2)$，…………………… 11 分

∴$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{4+3}{\sqrt{13}\times 3}=\frac{7\sqrt{13}}{39}$，

设二面角 $D-EF-P$ 的平面角为 θ，则 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{7}{3\sqrt{13}}\right)^2}=\frac{2\sqrt{221}}{39}$.

故二面角 $D-EF-P$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{221}}{39}$. ………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)由 $x^2-x-6>0$ 得：$x<-2$ 或 $x>3$，

即 $g(x^2-x-6)$ 的定义域为 $\{x|x<-2$ 或 $x>3\}$，…………………………………………… 1 分

令 $m=x^2-x-6$，$y=\ln m$ 在 $m\in(0,+\infty)$ 内单调递增，

而 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$m=x^2-x-6$ 为减函数，

$x\in(3,+\infty)$ 时，$m=x^2-x-6$ 为增函数，

故函数 $g(x^2-x-6)$ 的单调递增区间是 $(3,+\infty)$. ……………………………………………… 3 分

(2)由 $x_2\in\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$ 与 $x_1\in(-\infty,0)$ 可知 $g(x_2)\in[-1,1]$，$\mathrm{e}^{x_1}\in(0,1)$，

所以 $a\mathrm{e}^{2x_1}-\mathrm{e}^{x_1}>1$ 或 $a\mathrm{e}^{2x_1}-\mathrm{e}^{x_1}<-1$，………………………………………………… 5 分

分离参数得 $a>\frac{1}{e^{2x_1}}+\frac{1}{e^{x_1}}$，或 $a<\frac{1}{e^{x_1}}-\frac{1}{e^{2x_1}}$ 有解，

令 $n=\frac{1}{e^{x_1}}$，则 $n>1,a>n^2+n$ 或 $a<n-n^2$ 有解，得 $a>2$ 或 $a<0$；…… 7 分

(3)依题意 $F(x)=ae^{2x}-e^x+ae^{-2x}-e^{-x}=a(e^x+e^{-x})^2-(e^x+e^{-x})-2a$，

令 $t=e^x+e^{-x}$，则函数 $F(x)$ 转化为 $h(t)=at^2-t-2a(t\geqslant2)$，

此时只需讨论方程 $at^2-t-2a=0$ 大于等于 2 的解的个数， …… 8 分

①当 $a=0$ 时，$h(t)=-t=0$ 没有大于等于 2 的解，此时 $F(x)$ 没有零点；…… 9 分

②当 $a>0$ 时，$h(0)=-2a<0$，

当 $h(2)>0$ 时，$a>1$，方程没有大于等于 2 的解，此时 $F(x)$ 没有零点；

当 $h(2)=0$ 时，$a=1$，方程有一个等于 2 的解，函数 $F(x)$ 有一个零点；

当 $h(2)<0$ 时，$0<a<1$，方程有一个大于 2 的解，函数 $F(x)$ 有两个零点. …… 11 分

③当 $a<0$ 时，$h(0)=-2a>0,h(2)=2a-2<0$ 恒成立，

即方程不存在大于等于 2 的解，此时函数 $F(x)$ 没有零点.

综上所述，当 $a=1$ 时，$F(x)$ 有一个零点；当 $0<a<1$ 时，$F(x)$ 有两个零点；当 $a\leqslant0$ 或 $a>1$ 时，$F(x)$ 没有零点.
…… 12 分

22.【解析】(1)设 $P(x,y)$，依题意 $F_1(-1,0),F_2(1,0)$，且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$.

所以 $(x+1)(x-1)+y^2=0$，整理得 $x^2+y^2=1$.

故点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=1$； …… 4 分

(注：也可以用斜率之积为 -1 来求轨迹方程，但需讨论斜率不存在的特殊情况. 否则扣 1 分)

(2)依题意，$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|$. …… 5 分

过 F_1 作平行于 l_2 的直线交 E 于 M,N 两点，由对称性知 $|CD|=|MN|$.

①当 l_1 的斜率为 0 或斜率不存在时，$S=\frac{1}{2}\times4\times3=6$； …… 6 分

②当 l_1 的斜率存在且不为 0 时，设 $l_1:x=my-1,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

联立方程 $\begin{cases}x=my-1,\\3x^2+4y^2-12=0,\end{cases}$ 消元得：$(3m^2+4)y^2-6my-9=0.\ \Delta=144(m^2+1)$.
…… 8 分

故 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\frac{\sqrt{\Delta}}{3m^2+4}=\frac{12(m^2+1)}{3m^2+4}$，同理，$|CD|=|MN|=\frac{12\left[\left(-\frac{1}{m}\right)^2+1\right]}{3\left(-\frac{1}{m}\right)^2+4}=\frac{12(m^2+1)}{4m^2+3}$.

故 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=\frac{72(m^2+1)^2}{(3m^2+4)(4m^2+3)}$. …… 10 分

令 $t=m^2+1,t\in(1,+\infty)$，则 $S=\frac{72t^2}{(3t+1)(4t-1)}=\frac{72}{-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+12}$，其中 $-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+12\in\left(12,\frac{49}{4}\right]$，

故 $S\in\left[\frac{288}{49},6\right)$.

综上，$S\in\left[\frac{288}{49},6\right]$. …… 12 分