2023～2024学年第一学期高三期中调研试卷

数　学

2023.11

注 意 事 项

学生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求：

1．本卷共6页，包含单项选择题(第1题～第8题)、多项选择题(第9题～第12题)、填空题(第13题～第16题)、解答题(第17题～第22题)．本卷满分150分，答题时间为120分钟．答题结束后，请将答题卡交回．

2．答题前，请您务必将自己的姓名、调研序列号用0.5毫米黑色墨水的签字笔填写在答题卡的规定位置．

3．请在答题卡上按照顺序在对应的答题区域内作答，在其他位置作答一律无效．作答必须用0.5毫米黑色墨水的签字笔．请注意字体工整，笔迹清楚．

4．请保持答题卡卡面清洁，不要折叠、破损．一律不准使用胶带纸、修正液、可擦洗的圆珠笔．

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共计40分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的．请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上．

1．下列条件中，使得“$a>b$”成立的充分不必要条件是

A．$|a|>|b|$　　B．$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　C．$a^2>b^2$　　D．$\ln a>\ln b$

2．已知集合$A=\{x|x^2-6x+5<0\}$，$B=\{x|x<a\}$，且$A\cap B=A$，则实数a的取值范围为

A．$(1,+\infty)$　　B．$[3,+\infty)$　　C．$[5,+\infty)$　　D．$(5,+\infty)$

3．已知$\cos(\alpha-\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{4}{5}$，则$\sin(\dfrac{\pi}{6}+\alpha)$的值为

A．$-\dfrac{4}{5}$　　B．$-\dfrac{3}{5}$　　C．$\dfrac{3}{5}$　　D．$\dfrac{4}{5}$

4．已知$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是两个单位向量，且$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=60°$，若$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，则$\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>=$

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

5．在$\triangle ABC$中，$A=\dfrac{\pi}{3}$，AB边上的高等于$\dfrac{\sqrt{3}}{3}AB$，则$\sin C=$

A．$\dfrac{\sqrt{7}}{14}$　　B．$\dfrac{\sqrt{21}}{14}$　　C．$\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$　　D．$\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$

6．已知曲线 $y=ae^x+x\ln x$ 在点 $(1,ae)$ 处的切线方程为 $y=2x+b$，则

A． $a=e^{-1},b=-1$　　B． $a=e^{-1},b=1$　　C． $a=e,b=-1$　　D． $a=e,b=1$

7．满足 $\{x|m\leqslant x\leqslant n\}=\{y|y=x^2,m\leqslant x\leqslant n\}$ 的实数对 m， n 构成的点(m,n)共有

A．1 个　　B．2 个　　C． 3 个　　D．无数个

8．已知 $a=\sin\frac{\pi}{13}+\cos\frac{\pi}{13}$， $b=3^{\frac{1}{4}}+3^{-\frac{1}{2}}$， $c=\log_3 2+\log_4 3$，则

A． $a<b<c$　　B． $a<c<b$　　C． $c<b<a$　　D． $c<a<b$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．每小题给出的四个选项中，都有多个选项是正确的，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，选错或不答的得 0 分．请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上．

9．已知复数 z 满足 $z(\sqrt{3}+i)=-2i$，则

A． $|z|=1$

B． z 的虚部为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C． $z^3+1=0$

D． $z^2=\overline{z}$

10．函数 $f(x)=\tan(2x-\frac{\pi}{4})$，则

A． $f(x)$ 的一个周期为 $\frac{\pi}{2}$

B． $f(x)$ 是增函数

C． $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3\pi}{8},0)$ 对称

D．将函数 $y=\tan 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度可得到 $f(x)$ 的图象

11．在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E， F 分别为棱 AB， AA_1 的中点，点 P 在对角线 A_1B 上，则

A．三棱锥 $P-CEF$ 体积为 $\frac{1}{6}$

B．点 P 到平面 CEF 的距离为 $\frac{2}{3}$

C． $AP+D_1P$ 的最小值为 $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

D．四面体 $BCEF$ 外接球的表面积为 14π

12．对于数列$\{a_n\}$，若存在正数M，使得对一切正整数n，都有$|a_n|\leqslant M$，则称数列$\{a_n\}$为有界数列；若这样的正数M不存在，则称数列$\{a_n\}$为无界数列．下列说法正确的有

A．等比数列$\{a_n\}$的公比为q，若$|q|<1$，则$\{a_n\}$是有界数列

B．若数列$\{a_n\}$的通项$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$，则$\{a_n\}$是有界数列

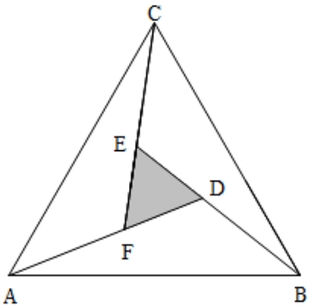
C．若正项数列$\{a_n\}$满足：$a_n=\frac{a_{n-1}}{3a_{n-2}}(n\geqslant 3)$，则$\{a_n\}$是无界数列

D．若数列$\{a_n\}$满足：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$，且$a_1\in(0,1)$，则$\{a_n\}$是有界数列

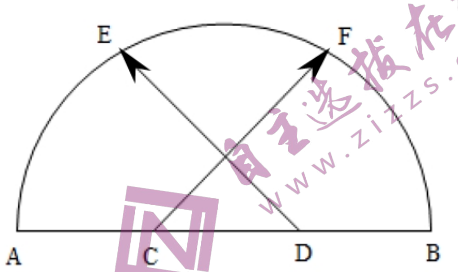
三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．请把答案填写在答题卡相应位置上．

13．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=2$，$5S_6-6S_5=30$，则$a_{10}=$____▲____．

14．如图，由 3 个全等的钝角三角形与中间一个小等边三角形DEF拼成的一个较大的等边三角形ABC，若$AF=3$，$\sin\angle ACF=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，则$\Delta DEF$的面积为____▲____．



（第 14 题图）



（第 15 题图）

15．如图，一个半径为 3 的半圆，C、D两点为直径AB的三等分点，E、F两点为弧AB上的三等分点，则$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DE}=$____▲____．

16．已知函数$f(x)=|3-x^2|-3$，若$|m|<n$，且$f(m)=f(n)$，则m的取值范围为____▲____，mn的取值范围为____▲____．（本小题第一空 2 分，第二空 3 分）

四、解答题：本大题共 6 小题，共计 70 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．(本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}$．

（1）求 $f(x)$ 的最小值及取得最小值时 x 的取值集合；

（2）若 $f(x)$ 的图象向右平移 m $(m>0)$ 个单位后得到的函数恰好为偶函数，求 m 的最小值．

▲▲▲

18．(本小题满分 12 分)

在①$\angle BAC$ 的平分线长为 $\frac{6}{5}$；②D 为 BC 中点，$AD=\frac{\sqrt{7}}{2}$；③AH 为 BC 边上的高，$AH=\frac{3\sqrt{57}}{19}$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解决该问题．

$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边为 a,b,c，已知 $b=2$，$2\cos A=3-a\cos B$．

（1）求 c;

（2）若___________，求$\angle BAC$ 的大小．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

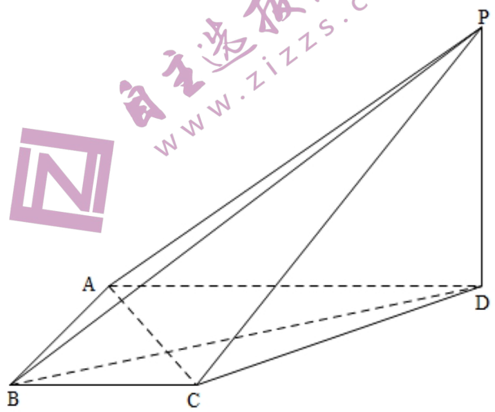
▲▲▲

19．(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是直角梯形， $AD//BC$， $AD=2BC$， $\angle DAB=90^0$，平面 $PDB\perp$ 平面 $ABCD$， $AC\perp BD$， $AB\perp PD$， $BC=1$， $PD=\sqrt{2}$.

（1）求证： $PD\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求二面角 $D-PC-B$ 的余弦值.



▲▲▲

20．(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=e^x-x^2+2x$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若关于 x 的不等式 $f(x)>(2-a)x+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

▲▲▲

21．(本小题满分 12 分)

已知S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_1=1$，$S_{n+1}+S_n=2n^2+2n+1$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_1=1, b_{n+1}+(-1)^n b_n=a_n$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

▲▲▲

22．(本小题满分 12 分)

已知函数$f(x)=ax^2+(a-2)x-\ln x$．

（1）若$f(x)$在区间$(1,2)$上有极值，求实数a的取值范围；

（2）当$0<a<1$时，求证：$f(x)$有两个零点x_1，x_2 $(x_1\neq x_2)$，且$f'(x_1)+f'(x_2)<0$．

▲▲▲

2023～2024 学年第一学期高三期中调研试卷

数学参考答案及评分建议

2023.11

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分.

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8
答 案	D	C	D	B	D	A	C	B

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分.

题 号	9	10	11	12
答 案	AD	AC	BCD	ABD

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分.

13．20； 14．$\sqrt{3}$； 15．$\frac{1}{2}$； 16．$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ ，$(-3,3)$

四、解答题：本大题共 6 小题，共计 70 分.

17．（本小题满分 10 分）

解：（1）因为 $f(x)=\sin\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}=2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})$，…………………………………… 2 分

当 $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ 即 $x=4k\pi-\frac{5\pi}{3},k\in Z$ 时，$f(x)$取得最小值-2，……………… 4 分

所以 $f(x)$的最小值为-2，此时 x 的取值集合为 $\{x\,|\,x=4k\pi-\frac{5\pi}{3},k\in Z\}$．……………… 5 分

（2）设 $f(x)$ 的图象向右平移 m $(m>0)$ 个单位后得到函数 $g(x)$，则 $g(x)=2\sin(\frac{x-m}{2}+\frac{\pi}{3})$，

因为 $g(x)$ 为偶函数，所以 $g(-x)=g(x)$，即 $\sin(\frac{x}{2}-\frac{m}{2}+\frac{\pi}{3})=\sin(-\frac{x}{2}-\frac{m}{2}+\frac{\pi}{3})$，

所以 $\sin\frac{x}{2}\cos(-\frac{m}{2}+\frac{\pi}{3})=0$ 恒成立，所以 $-\frac{m}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，……………………… 8 分

所以 $m=-\frac{\pi}{3}-2k\pi,k\in Z$，…………………………………………………………… 9 分

又因为 $m>0$，所以 $m_{\min}=\frac{5\pi}{3}$．…………………………………………………………… 10 分

18．(本小题满分 12 分)

解：（1）由 b=2 及 $2\cos A=3-a\cos B$ 得 $b\cos A=3-a\cos B$，即 $b\cos A+a\cos B=3$，……… 2 分

由余弦定理得 $b\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+a\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=3$，……………………………………………… 4 分

所以 $c=3$．……………………………………………………………………………… 5 分

（2）若选①，记∠BAC=2θ，∠BAC 的平分线交 BC 于 D，则有 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，

……………………………………………………………………………… 6 分

即 $\frac{1}{2}bc\sin 2\theta=\frac{1}{2}b\cdot AD\sin\theta+\frac{1}{2}c\cdot AD\sin\theta$，……………………………………………… 7

分

即 $6\sin 2\theta=\frac{12}{5}\sin\theta+\frac{18}{5}\sin\theta$ 即 $\sin 2\theta=\sin\theta$，所以 $2\sin\theta\cos\theta=\sin\theta$， ……………… 9 分

因为 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\sin\theta\neq 0$ 从而 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ 即 $\theta=\frac{\pi}{3}$， ………………………………………… 11 分

所以 $\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$． ………………………………………………………………………………… 12 分

若选②，由于 D 为 BC 中点，所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$， ……………………………………… 6 分

即 $4\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$， ………………………………………………………… 7 分

又因为 $|\overrightarrow{AD}|=\frac{\sqrt{7}}{2}$，$|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3$， ………………………………… 9 分

即 $|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle BAC=-3$，所以 $\cos\angle BAC=-\frac{1}{2}$， ………………………………………… 11 分

又因为 $\angle BAC\in(0,\pi)$，所以 $\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$． ……………………………………………………… 12 分

若选③，由于 AH 为 BC 边上的高，

在 Rt△BAH 中，$BH^2=AB^2-AH^2=9-\frac{9\times 57}{19\times 19}=\frac{144}{19}$，所以 $BH=\frac{12\sqrt{19}}{19}$， …………… 7 分

在 Rt△CAH 中，$CH^2=AC^2-AH^2=4-\frac{9\times 57}{19\times 19}=\frac{49}{19}$，所以 $CH=\frac{7\sqrt{19}}{19}$， …………… 9 分

所以 $BC=BH+CH=\sqrt{19}$，

由余弦定理得 $\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{9+4-19}{2\times 3\times 2}=-\frac{1}{2}$， ………………………… 11 分

又因为 $\angle BAC\in(0,\pi)$，所以 $\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$． ……………………………………………………… 12 分

19．(本小题满分 12 分)

解：（1）因为平面 $PDB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PDB\cap$ 平面 $ABCD=BD$，$AC\perp BD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$

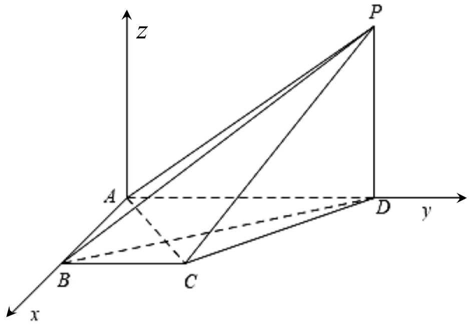
所以 $AC\perp$ 平面 PDB， ……………………………………………………………………………… 1 分

又因为 $PD\subset$ 平面 PDB，所以 $AC\perp PD$， ………………………………………………………… 2 分

又因为 $AB\perp PD$，$AC\cap AB=A$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PD\perp$ 平面 $ABCD$， ………………………………………………………………………………… 4 分

（2）



由（1）知 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，

又 $AD\subset$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PD\perp AD$，$PD\perp AB$，

过 A 引 $AZ/\!/PD$，则有 $AZ\perp AD$，$AZ\perp AB$，

又因为 $\angle DAB=90^0$，即 $AB\perp AD$，

以 A 为原点，以 AB 为 x 轴，以 AD 为 y 轴，以 AZ 为 z 轴建立空间直角坐标系， …… 5 分

设 $AB=t(t>0)$，则 $A(0,0,0)$，$B(t,0,0)$，$C(t,1,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,2,\sqrt{2})$，

所以 $\overrightarrow{AC}=(t,1,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-t,2,0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,0,\sqrt{2})$，

由于 $AC\perp BD$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，

所以 $t^2=2$，即 $t=\sqrt{2}$，…………………………………………………………… 7 分

从而 $C(\sqrt{2},1,0)$，则 $\overrightarrow{DC}=(\sqrt{2},-1,0)$，…………………………………………………… 8 分

设平面 PDC 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则有 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{2}z=0,\\ \sqrt{2}x-y=0,\end{cases}$

取 $x=1$，解得 $\begin{cases}y=\sqrt{2},\\ z=0,\end{cases}$ 即 $\vec{n}=(1,\sqrt{2},0)$，…………………………………………… 9 分

同理，可求得平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,0,1)$，…………………………………… 10 分

所以 $|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=|\dfrac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}|=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ …………………………………………………… 11 分

设二面角 $D-PC-B$ 的平面角为 θ，θ 为钝角，

所以二面角 $D-PC-B$ 的平面角余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$．………………………………………… 12 分

20．(本小题满分 12 分)

解：（1）因为 $f(x)=e^x-x^2+2x$，所以 $f'(x)=e^x-2x+2$，……………………………………… 1 分

令 $m(x)=f'(x)=e^x-2x+2$，则 $m'(x)=e^x-2$，

当 $x\in(-\infty,\ln 2)$ 时，$m'(x)<0$；当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时，$m'(x)>0$．

所以 $m(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增．

所以 $m(x)_{\min}=m(\ln 2)=2(2-\ln 2)>0$，………………………………………………………… 3 分

即 $f'(x)>0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$，无单调递减区间．…………………………………… 5 分

（2）由题意 $f(x)>(2-a)x+1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

即 $e^x-x^2+2x>2x-ax+1$ 恒成立，即 $a>\dfrac{1}{x}+x-\dfrac{e^x}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，…………… 6 分

令 $g(x)=\dfrac{1}{x}+x-\dfrac{e^x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，只需 $a>g(x)_{\max}$，……………………………………… 7 分

有 $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+1-\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x+1-e^x)}{x^2}$，$x\in(0,+\infty)$，…………………………… 8 分

令 $h(x)=x+1-\mathrm{e}^x$，$x\in[0,+\infty)$，有 $h'(x)=1-\mathrm{e}^x\leqslant 0$，从而 $h(x)\leqslant h(0)=0$，……………… 9 分

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，……………………………………… 10 分

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=2-\mathrm{e}$，………………………………………………………………… 11 分

所以 $a>2-e$．…………………………………………………………………………………… 12 分

21．(本小题满分 12 分)

解：（1）**法一：** 当 $n=1$ 时，$S_2+S_1=5$，即 $a_2+2a_1=5$，由 $a_1=1$，得 $a_2=3$，

由 $S_{n+1}+S_n=2n^2+2n+1$，得 $S_n+S_{n-1}=2(n-1)^2+2(n-1)+1\ (n\geqslant 2)$，

两式相减得：$a_{n+1}+a_n=4n(n\geqslant 2)$．又 $a_2+a_1=4$，满足上式．

所以当 $n\in N^*$ 时，$a_{n+1}+a_n=4n$，………………………………………………… 1 分

又当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n+a_{n-1}=4(n-1)$，

两式相减得：$a_{n+1}-a_{n-1}=4(n\geqslant 2)$，………………………………………………… 2 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是以 $a_1=1$ 为首项，4 为公差的等差数列，

所以 $a_n=a_1+\frac{n-1}{2}\times 4=1+2(n-1)=2n-1$ (n 为奇数)，………………………………… 3 分

数列 $\{a_n\}$ 的偶数项是以 $a_2=3$ 为首项，4 为公差的等差数列，

所以 $a_n=a_1+\frac{n-1}{2}\times 4=1+2(n-1)=2n-1$ (n 为偶数)，………………………………… 4 分

所以 $a_n=2n-1$，即 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=2n-1$．………………………………………… 5 分

法二：因为 $S_{n+1}+S_n=2n^2+2n+1$，所以 $S_{n+1}-(n+1)^2=-(S_n-n^2)=\cdots=(-1)^n(S_1-1^2)$，……… 2 分

因为 $S_1-1^2=0$，所以 $S_n-n^2=0$，即 $S_n=n^2$，………………………………………… 3 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，………………………………………… 4 分

当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 适合上式，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=2n-1$．……………………… 5 分

（2）因为 $b_{n+1}+(-1)^n b_n=a_n$，所以：

当 $n=2k-1(n\in N^*)$ 时，$b_{2k}-b_{2k-1}=a_{2k-1}=2(2k-1)-1=4k-3$……①

当 $n=2k(n\in N^*)$ 时，$b_{2k+1}+b_{2k}=a_{2k}=2\times 2k-1=4k-1$……②

①、②两式相减得：$b_{2k+1}+b_{2k-1}=2(k\geqslant 1)$，………………………………………… 6 分

因为 $b_1=1$，$b_3+b_1=2$，所以 $b_3=1$，

因为 $b_{2k+1}+b_{2k-1}=2(k\geqslant 1)$，所以当 n 为奇数时，$b_n=1$，…………………………… 7 分

当 n 为偶数时，$b_n-b_{n-1}=a_{n-1}=2(n-1)-1=2n-3$，

所以 $b_n=a_{n-1}+1=2n-3+1=2n-2$，………………………………………………………… 8 分

所以 $b_n=\begin{cases}1, n\text{为奇数}\\ 2n-2, n\text{为偶数}\end{cases}$，……………………………………………………… 9 分

(i)当 n 为偶数时，

$$T_n=(b_1+b_3+\cdots+b_{n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_n)=\frac{n}{2}\times 1+\frac{\frac{n}{2}(2+2n-2)}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n.$$ ………… 10 分

(ii)当 n 为奇数时，

$$T_n=T_{n+1}-b_{n+1}=T_{n+1}-b_{n+1}=[\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{2}(n+1)]-[2(n+1)-2]=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1.$$ ……… 11 分

综上，$T_n=\begin{cases}\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1, n\text{为奇数}\\ \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n,\ n\text{为偶数}\end{cases}$．……………………………………………… 12 分

22．(本小题满分 12 分)

解：（1）因为 $f(x)=ax^2+(a-2)x-\ln x$， $x\in(1,2)$

所以 $f'(x)=2ax+a-2-\frac{1}{x}=\frac{2ax^2+(a-2)x-1}{x}=\frac{(2x+1)(ax-1)}{x}$， …………………………… 1 分

①当 $a\leqslant 0$ 时， $f'(x)<0$

所以 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上无极值点， …………………………… 2 分

②当 $a>0$ 时，当 $x\in(0,\frac{1}{a})$ 时， $f'(x)<0$；当 $x\in(\frac{1}{a},+\infty)$ 时， $g'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 的极小值点为 $\frac{1}{a}$，无极大值点，

因为 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上有极值，所以 $\frac{1}{a}\in(1,2)$，

所以 $\frac{1}{2}<a<1$. …………………………………………………………………………… 4 分

（2）当 $0<a<1$ 时， $f'(x)=\frac{(2x+1)(ax-1)}{x}$， $x>0$

由(1)知： $f(x)_{极小}=f(\frac{1}{a})=-\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+1$， $0<a<1$， $\frac{1}{a}>1$

令 $t=\frac{1}{a}$， $t>1$，则 $f(t)=-\ln t-t+1$

因为 $f'(t)=-\frac{1}{t}-1<0$， $t\in(1,+\infty)$ 恒成立，所以 $f(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减

所以 $f(t)<f(1)=0$ 即 $f(x)_{极小}=f(\frac{1}{a})<0$， …………………………………… 5 分

因为 $f(\frac{1}{e})=\frac{a}{e^2}+\frac{a-2}{e}-\ln\frac{1}{e}=\frac{a}{e^2}+\frac{a}{e}+1-\frac{2}{e}>0$，

由(1)知： $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上单调递减，且 $f(\frac{1}{e})\cdot f(\frac{1}{a})<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上存在唯一的零点 x_1，使 $f(x_1)=0$， ………………………… 6 分

因为 $f(\frac{3}{a})=\frac{9}{a}+\frac{3(a-2)}{a}-\ln\frac{3}{a}=3+\frac{3}{a}-\ln\frac{3}{a}$，

又 $\ln\frac{3}{a}<\frac{3}{a}-1, 0<a<1$，所以 $f(\frac{3}{a})>3+1=4>0$，

由(1)知 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增，且 $f(\frac{1}{a})\cdot f(\frac{3}{a})<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上存在唯一的零点 x_2，使 $f(x_2)=0$.

所以 $f(x)$ 有两个零点 x_1， $x_2(x_1\neq x_2)$. ……………………………………………… 7 分

下面证明 $f'(x_1)+f'(x_2)<0$：

设 $0<x_1<x_2$，则

$$\begin{cases} f(x_1)=ax_1{}^2+(a-2)x_1-\ln x_1=a(x_1{}^2+x_1)-2x_1-\ln x_1=0 \\ f(x_2)=ax_2{}^2+(a-2)x_2-\ln x_2=a(x_2{}^2+x_2)-2x_2-\ln x_2=0 \end{cases}.$$

两式相减： $a[(x_1{}^2-x_2{}^2)+(x_1-x_2)]-2(x_1-x_2)-(\ln x_1-\ln x_2)=0$

即 $a(x_1-x_2)(x_1+x_2+1)-2(x_1-x_2)-\ln\dfrac{x_1}{x_2}=0$

所以 $a=\dfrac{2(x_1-x_2)+\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{(x_1-x_2)(x_1+x_2+1)}$， ……………………………………………………… 8 分

因为 $f'(x)=\dfrac{2ax^2+(a-2)x-1}{x}=2ax-\dfrac{1}{x}+a-2$

所以 $f'(x_1)+f'(x_2)=2a(x_1+x_2)-(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2})+2(a-2)=2a(x_1+x_2+1)-(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2})-4$

$$=2(x_1+x_2+1)\frac{2(x_1-x_2)+\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{(x_1-x_2)(x_1+x_2+1)}-(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})-4=\frac{2\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{(x_1-x_2)}-(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})$$，…………… 9 分

要证：$f'(x_1)+f'(x_2)<0$，即证：$\dfrac{2\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{(x_1-x_2)}-(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2})<0(0<x_1<x_2)$，

只要证：$2\ln\dfrac{x_1}{x_2}-(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2})(x_1-x_2)>0$，即证：$2\ln\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}>0$． ……………………… 10 分

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2},t\in(0,1)$，即证：$2\ln t-t+\dfrac{1}{t}>0$，$t\in(0,1)$．

令 $m(t)=2\ln t-t+\dfrac{1}{t}$，$t\in(0,1)$，则 $m'(t)=\dfrac{2}{t}-1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{-(t-1)^2}{t^2}<0$，$t\in(0,1)$ 恒成立

所以 $m(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $m(t)>m(1)=0$．

即 $2\ln\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}>0$ 成立，

故 $f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2 $(x_1\neq x_2)$，且 $f'(x_1)+f'(x_2)<0$． ………………………………… 12 分