

2023~2024 学年高三上学期协作校第二次考试 数学试题参考答案

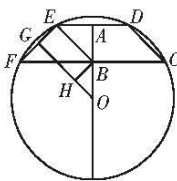
1. B 由 $A=\{1,3,5\}, B=\{2,3,5\}$, 可得 $A \cup B = \{1,2,3,5\}$.
2. A 全称量词命题的否定为存在量词命题.
3. D 因为 $\frac{4}{2+(1+i)^2} = \frac{4}{2+2i} = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{2} = 1-i$, 所以 $\frac{4}{2+(1+i)^2}$ 对应的点位于第四象限.
4. C 因为 $a+b \geq 2\sqrt{ab} = 10^4$ (当且仅当 $a=b=5000$ 时, 等号成立), 所以这两人月薪之和的最小值为 1 万元.
5. A 因为 $f(x) = ax^3 + (4-a)x^2 (x \in \mathbf{R})$ 为奇函数, 所以 $4-a=0$, 即 $a=4$, 所以 $f(x) = 4x^3$, 所以 $f'(x) = 12x^2$, 则 $f'(1) = 12$.
6. D 因为 $4+5+9=2+2+14$, 所以 $a_4 a_5 a_9 = a_2^2 a_{14}$, 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 各项均不为 0, 所以必有 $a_{14}=1$.
7. C 由 $\overrightarrow{CA_1} \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CA}) \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CC_1} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC_1} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}^2 = 2 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} + 2 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} + 2 \times 2 \times \cos \angle ACB + 2^2 = 8 + 4 \cos \angle ACB > 10$, 得 $\cos \angle ACB > \frac{1}{2}$, 则 $0 < \angle ACB < \frac{\pi}{3}$, 反之亦成立.
8. C 令 $f(x) = |2^{x-1} - 2| + m = 0$, 得 $|2^{x-1} - 2| = -m$. 因为 $f(x)$ 有 2 个零点, 所以函数 $y = |2^{x-1} - 2|$ 的图象与直线 $y = -m$ 有 2 个交点. 画出函数 $y = |2^{x-1} - 2|$ 的大致图像. 由图可知 $0 < -m < 2$, 则 $-2 < m < 0$.
9. CD 若以 kg 为单位, 则木星质量的数量级为 27, 若以 g 为单位, 则木星质量的数量级为 30, A 错误, C 正确. 因为 $\lg s = 3.1$, 所以 $s = 10^{3.1} = 10^{0.1} \times 10^3 (1 < 10^{0.1} < 10)$, 所以 s 的数量级为 3, B 错误, D 正确.
10. BC 过点 P 只能作一个平面与 α 平行, 过点 P 可以作无数条直线与 α 平行, 过点 P 可以作无数个平面与 α 垂直, 过点 P 只能作一条直线与 α 垂直.
11. ABD 易知该圆台的高 $h=1$, 上底面圆的半径 $r=1$, 下底面圆的半径 $R=2$.

对于 A, 该圆台的体积 $V = \frac{\pi}{3}(r^2 + R^2 + rR)h = \frac{7\pi}{3}$, A 正确.

对于 B, 该圆台的侧面积 $S = \pi(r+R)l = \pi(1+2) \times \sqrt{1^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}\pi$, B 正确.

对于 C, 该圆台可由底面半径为 2, 高为 2 的圆锥所截得, C 错误.

对于 D, 作该圆台与它的外接球的轴截面, 如图所示, 其中线段 EF 的中垂线 GH 交直线 AB 于 O 点, 点 O 就是外接球的球心. 作 $BH \perp OG$, 垂足为 H , 易知 $\angle BOH = \angle ABE = \frac{\pi}{4}$, $EF = \sqrt{2}$, $BH = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $BO = 1$, 外接球半径 $OF = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, D 正确.



12. BCD 不等式 $x^2 + 7a < (7+a)x$ 等价于不等式 $(x-a)(x-7) < 0$. 当 $a=7$ 时, $(x-a)(x-7) < 0$ 的解集为 $\emptyset$, 不合题意;

当 $a < 7$ 时, $(x-a)(x-7) < 0$ 的解集为 $(a, 7)$, 则 50 个整数解为 $-43, -42, \dots, 5, 6$, 所以 $-44 \leq a < -43$, 这 50 个整数元素之和为 $\frac{(-43+6) \times 50}{2} = -925$;

当 $a > 7$ 时, $(x-a)(x-7) < 0$ 的解集为 $(7, a)$, 则 50 个整数解为 $8, 9, \dots, 56, 57$, 所以 $57 < a \leq 58$, 这 50 个整数元素之和为 $\frac{(8+57) \times 50}{2} = 1625$.

综上, a 的取值范围是 $[-44, -43) \cup (57, 58]$, 这 50 个整数元素之和为 -925 或 1625 .

13. 12 由 $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$, 可得 $3 \times 8 - 2t = 0$, 解得 $t = 12$.

14. 24π 该正方体内切球的直径为 $2\sqrt{6}$, 所以该正方体内切球的表面积为 $4\pi \times (\sqrt{6})^2 = 24\pi$.

15. $-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{1}{3}$ 因为 $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{3}{5}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 所以 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\tan \alpha = -2$, $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{-2+1}{1-(-2) \times 1} = -\frac{1}{3}$.

16. $\frac{27-3\sqrt{17}}{8}$ 过点 C 作 $CF \perp BD$, 垂足为 F . 设 $AB = x (x > 0)$, 则 $BD = AE =$

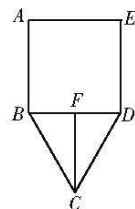
$DE = x$, 因为 $BC = CD$, 所以 $3AB + 2BC = 12$, 则 $BC = 6 - \frac{3}{2}x$. 由 $BC > 0$, $BC +$

$CD > BD$, 得 $0 < x < 3$. 在 $\triangle BCF$ 中, $CF = \sqrt{BC^2 - BF^2} = \sqrt{(6 - \frac{3}{2}x)^2 - (\frac{1}{2}x)^2}$

$= \sqrt{2x^2 - 18x + 36}$. 记 $\triangle BCD$ 的面积为 S , 则 $S = \frac{1}{2}BD \cdot CF = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^4 - 9x^3 + 18x^2}$. 设函数

$f(x) = x^4 - 9x^3 + 18x^2$, 则 $f'(x) = 4x^3 - 27x^2 + 36x = x(4x^2 - 27x + 36)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = \frac{27+3\sqrt{17}}{8}$. 当 $0 < x < \frac{27-3\sqrt{17}}{8}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $\frac{27-3\sqrt{17}}{8} < x < 3$ 时, $f'(x) <$

0 . 故当 $x = \frac{27-3\sqrt{17}}{8}$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 则 S 取得最大值, 此时 $AB = \frac{27-3\sqrt{17}}{8}$.



17. 解: (1) 因为 $\sqrt{5}a \sin B = b$, 所以 $\sqrt{5} \sin A \sin B = \sin B$, 2 分

因为 $\sin B > 0$, 所以 $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 4 分

(2) 因为 A 为钝角, 且 $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\cos A = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 6 分

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 7 分

即 $a^2 = 5 + 9 - 6\sqrt{5} \times (-\frac{2\sqrt{5}}{5}) = 26$, 9 分

所以 $a = \sqrt{26}$, $\triangle ABC$ 的周长为 $3 + \sqrt{5} + \sqrt{26}$ 10 分

18. 解: (1) $f(x) = \sin^2 \omega x - \cos^2 \omega x + 2 \sin \omega x \cos \omega x = \sin 2\omega x - \cos 2\omega x$

$= \sqrt{2} \sin(2\omega x - \frac{\pi}{4})$ 3 分

因为 $f(x)$ 图象的一条对称轴方程为 $x = \frac{3\pi}{16}$,

所以 $2\omega \cdot \frac{3\pi}{16} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\omega = 2 + \frac{8}{3}k, k \in \mathbf{Z}$ 5 分

因为 $0 < \omega < 4$, 所以 $\omega = 2$ 6 分

所以 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$ 7 分

(2) 由 (1) 知 $f(x) = \sqrt{2} \sin(4x - \frac{\pi}{4})$. 因为 $x \in [\frac{5\pi}{48}, \frac{11\pi}{48}]$,

所以 $4x - \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$, 9 分

所以 $\sin(4x - \frac{\pi}{4}) \in [\frac{1}{2}, 1]$, 故 $f(x) \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}]$ 12 分

19. (1) 证明: 因为 $a_{n+1} = 2a_n + n - 1$, 所以 $\frac{a_{n+1} + n + 1}{a_n + n} = \frac{2a_n + n - 1 + n + 1}{a_n + n} = \frac{2(a_n + n)}{a_n + n} = 2$

..... 3 分

又 $a_1 = 3$, 所以 $a_1 + 1 = 4$, 4 分

所以数列 $\{a_n + n\}$ 是等比数列, 且首项为 4, 公比为 2. 5 分

(2) 解: 由 (1) 知 $a_n + n = 4 \cdot 2^{n-1}$, 6 分

即 $a_n + n = 2 \cdot 2^n$, 则 $\frac{2n}{a_n + n} = \frac{n}{2^n}$ 7 分

$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n}$, 8 分

$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^{n+1}}$, 9 分

则 $\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}}$, 11 分

所以 $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ 12 分

20. (1) 证明: 因为 $AB^2 + BC^2 = AC^2$, 所以 $AB \perp BC$ 1 分

因为 $BE \perp$ 底面 $ABCD$, 所以 $BE \perp BC$, 2 分

因为 $AB \cap BE = B$, 3 分

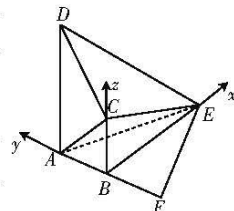
所以 $BC \perp$ 平面 ABE 4 分

又 $BC \parallel AD$, 所以 $AD \perp$ 平面 ABE 5 分

(2) 解: 以 B 为坐标原点, $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $E(3, 0, 0), C(0, 0, 1), D(0, 1, 3), F(0, -1, 0)$, 6 分

$\overrightarrow{CE} = (3, 0, -1), \overrightarrow{CD} = (0, 1, 2)$ 7 分

设平面 CDE 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,



则 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CE} = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, 即 $\begin{cases} 3x - z = 0, \\ y + 2z = 0, \end{cases}$ 8 分

令 $x=1$, 得 $\mathbf{n}=(1, -6, 3)$ 9 分

因为 $\overrightarrow{FE}=(3, 1, 0)$, 10 分

所以点 F 到平面 CDE 的距离 $d = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{FE}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{3}{\sqrt{46}} = \frac{3\sqrt{46}}{46}$ 12 分

21. 解: (1) 当 $n=1$ 时, $\frac{1}{a_1}=2$, 解得 $a_1=\frac{1}{2}$ 1 分

因为 $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{n}{a_n} = \frac{n^2+3n}{2}$,

所以当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{n-1}{a_{n-1}} = \frac{(n-1)^2+3(n-1)}{2}$, 2 分

两式相减得 $\frac{n}{a_n} = n+1$, 即 $a_n = \frac{n}{n+1}$ 4 分

因为 $a_1 = \frac{1}{2}$ 满足上式, 所以 $a_n = \frac{n}{n+1}$ 5 分

(2) 由题意可得, $d_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{n} = \frac{\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}}{n} = \frac{1}{(n+2)(n+1)n} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$, 9 分

$d_1 + d_2 + \dots + d_n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ 12 分

22. 解: (1) $f'(x) = \frac{a}{x} - (a+1) + x = \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x} = \frac{(x-a)(x-1)}{x} (x > 0)$ 1 分

当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 2 分

当 $0 < a < 1$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < a$ 或 $x > 1$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $a < x < 1$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(a, 1)$ 上单调递减. 3 分

当 $a=1$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 4 分

当 $a > 1$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$ 或 $x > a$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $1 < x < a$,

$f(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, a)$ 上单调递减. 5 分

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$;

当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, a)$ 和 $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(a, 1)$;

当 $a=1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间;

当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$ 和 $(a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(1, a)$ 6 分

(2) $f(x) \geq x^a - e^x + \frac{1}{2}x^2 - ax$, 即 $a \ln x - x \geq x^a - e^x$, 整理得 $\ln x^a - x^a \geq \ln e^x - e^x$

..... 7 分

因为 $x \in (1, +\infty)$, $a > 0$, 所以 $x^a > 1$, $e^x > 1$.

令 $g(x) = \ln x - x, x \in (1, +\infty)$.

因为 $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减. 9 分

因为 $g(x^a) = \ln x^a - x^a \geq g(e^x) = \ln e^x - e^x$, 所以 $x^a \leq e^x$, 所以 $a \ln x \leq x$ 10 分

因为 $\ln x > 0$, 所以 $a \leq \frac{x}{\ln x}$. 令 $h(x) = \frac{x}{\ln x}, x \in (1, +\infty)$, 则 $h'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.

令 $h'(x) > 0$, 得 $x > e$, 令 $h'(x) < 0$, 得 $1 < x < e$,

所以 $h(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h(x)_{\min} = h(e) = e$, 11 分

所以 $0 < a \leq e$, 即实数 a 的取值范围是 $(0, e]$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线