大联考长郡中学2024届高三月考试卷(三)

数学参考答案

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	D	A	C	D	B	C

1. A 【解析】∵$A=\{x|x^2-4x+3<0\}=(1,3)$,$B=\{x|\ln x\leqslant 1\}=(0,\mathrm{e}]$,∴$A\cap B=(1,\mathrm{e}]$,故选A.

2. B 【解析】因为$\frac{2+3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(2+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$,所以实部为$\frac{5}{2}$,虚部为$\frac{1}{2}$,实部与虚部之积为$\frac{5}{4}$.故选B.

3. D 【解析】因为$0\leqslant x\leqslant 9$,所以$0\leqslant\frac{\pi}{6}x\leqslant\frac{9\pi}{6}$,所以$-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{6}$,

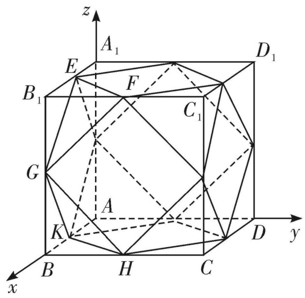
所以当$\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$时,有最小值为$2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$,

所以当$\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$时,有最大值为$2\sin\frac{\pi}{2}=2$,所以最大值与最小值之差为$2+\sqrt{3}$,故选D.

4. A 【解析】由于$f(x)=\lg(x^2-4x-5)$在$(a,+\infty)$上单调递增,而$y=\lg x$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以$\begin{cases}a^2-4a-5\geqslant 0,\\a\geqslant 2,\end{cases}$所以$a\geqslant 5$,故$a$的取值范围是$[5,+\infty)$,故选A.

5. C 【解析】由双曲线的定义得,$||PF_1|-|PF_2||=2a$,又$|PF_1|=3|PF_2|$,所以$|PF_2|=a$,$|PF_1|=3a$,所以在$\triangle F_1PF_2$中,有$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_1PF_2$,即$4c^2=9a^2+a^2-2\cdot 3a\cdot a\cos 60°$,化简得$4c^2=7a^2$,即$\frac{c^2}{a^2}=\frac{7}{4}$,所以离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$,故选C.

6. D 【解析】将该"阿基米德多面体"放入正方体中,如图,平面EFG和平面GHK为有公共顶点的两个正三角形所在平面,建立如图所示空间直角坐标系,设正方体的棱长为2,



则$E(1,0,2)$,$F(2,1,2)$,$G(2,0,1)$,$H(2,1,0)$,$K(1,0,0)$,

设平面EFG的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,$\overrightarrow{EF}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{EG}=(1,0,-1)$,

所以$\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{m}=x+y=0,\\\overrightarrow{EG}\cdot\boldsymbol{m}=x-z=0,\end{cases}$令$x=1$,$y=-1$,$z=1$,所以$\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$,

设平面GHK的法向量为$\boldsymbol{n}=(a,b,c)$,$\overrightarrow{GH}=(0,1,-1)$,$\overrightarrow{GK}=(-1,0,-1)$,

所以$\begin{cases}\overrightarrow{GH}\cdot\boldsymbol{n}=b-c=0,\\\overrightarrow{GK}\cdot\boldsymbol{n}=-a-c=0,\end{cases}$令$a=1$,$b=-1$,$c=-1$,所以$\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$,

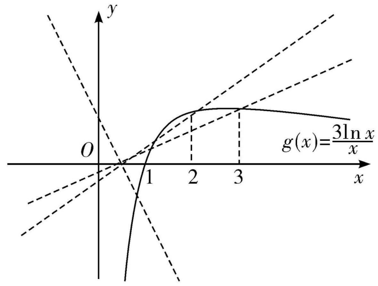
设平面EFG和平面GHK的夹角为θ,则$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$,

因为平面EFG和平面GHK的夹角为锐角,所以$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{1}{3}$,

所以$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2\sqrt{2}$,故选D.

7. B 【解析】$z=4x^2-3xy+y^2$，则$\frac{xy}{z}=\frac{xy}{4x^2-3xy+y^2}=\frac{1}{\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}-3}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{x}}-3}=1$.

8. C 【解析】由 $f(x)>0$，得$\frac{3\ln x}{x}>-a+2ax$，令 $g(x)=\frac{3\ln x}{x}$，$h(x)=-a+2ax$，则 $g'(x)=\frac{3(1-\ln x)}{x^2}$，则 $g(x)$在$(0,\mathrm{e})$上单调递增，在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减，作出 $g(x)$的大致图象如图所示，



易知 $h(x)$ 的图象是恒过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$的直线，若 $a\leqslant 0$，则显然不符合题意；若 $a>0$，则$\begin{cases}g(2)>h(2),\\g(3)\leqslant h(3),\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{3\ln 2}{2}>-a+4a,\\\frac{3\ln 3}{3}\leqslant -a+6a,\end{cases}$解得$\frac{\ln 3}{5}\leqslant a<\frac{\ln 2}{2}$. 故选 C.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

题　号	9	10	11	12
答　案	CD	BCD	AD	ACD

9. CD 【解析】对于 A，令 $x=1$，则展开式所有项系数和为$\left(-\frac{1}{2}\right)^n=-\frac{1}{128}$，解得 $n=7$，则展开式共有 8 项，A 错误；

对于 B，样本点$(m,2)$不一定在回归直线上，$\therefore m$ 不一定是 2，B 错误；

对于 C，$\because P(X>-2)+P(X\geqslant 6)=1$，$P(X\leqslant -2)+P(X>-2)=1$，

$\therefore P(X\leqslant -2)=P(X\geqslant 6)$，$\therefore \mu=\frac{6-2}{2}=2$，C 正确；

对于 D，$\because X\sim B(5,0.6)$，$\therefore D(X)=5\times 0.6\times 0.4=1.2$，

$\because 2X-Y=6$，$\therefore D(Y)=D(2X-6)=4D(X)=4\times 1.2=4.8$，D 正确. 故选 CD.

10. BCD 【解析】由题意可知点 $A(2,1)$，点 $B(2+t,1-t)$，故$\overrightarrow{AB}=(t,-t)$，

因为$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$，故 $t^2+(-t)^2=8$，$\therefore t^2=4$，

又$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}>0$，即$(t,-t)\cdot(2,1)>0$，$\therefore 2t-t>0$，$\therefore t>0$，故 $t=2$，

所以$\overrightarrow{AB}=(2,-2)$，$B(4,-1)$，故 A 错误，B 正确；

因为点 B 绕点 A 沿逆时针方向旋转$\frac{\pi}{3}$得到点 P，

所以$\overrightarrow{AP}=\left(2\cos\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{\pi}{3},2\sin\frac{\pi}{3}-2\cos\frac{\pi}{3}\right)=(1+\sqrt{3},\sqrt{3}-1)$，

则由$(1+\sqrt{3},\sqrt{3}-1)+(2,1)=(3+\sqrt{3},\sqrt{3})$，可得点 P 坐标为$(3+\sqrt{3},\sqrt{3})$，故 C 正确；

故$\overrightarrow{BP}=(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1)$，则$|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}=2\sqrt{2}$，D 正确，故选 BCD.

11. AD 【解析】将点 A 坐标的代入抛物线方程得 $1=2p$，所以抛物线方程为 $x^2=y$，故准线方程为 $y=-\frac{1}{4}$，故 A 正确；

$k_{AB}=\frac{1-(-1)}{1-0}=2$，所以直线 AB 的方程为 $y=2x-1$，联立$\begin{cases}y=2x-1,\\x^2=y,\end{cases}$可得 $x^2-2x+1=0$，解得 $x=1$，故直线 AB 与 C 相切，故 B 错；

设过 B 的直线为 l,若直线 l 与 y 轴重合,则直线 l 与抛物线 C 只有一个交点,

所以直线 l 的斜率存在,设其方程为 $y=kx-1$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

联立 $\begin{cases}y=kx-1,\\x^2=y,\end{cases}$ 得 $x^2-kx+1=0$,所以 $\begin{cases}\Delta=k^2-4>0,\\x_1+x_2=k,\\x_1x_2=1,\end{cases}$ 所以 $k>2$ 或 $k<-2$,$y_1y_2=(x_1x_2)^2=1$,

又 $|OP|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{y_1+y_1^2}$,$|OQ|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{y_2+y_2^2}$,

所以 $|OP|\cdot|OQ|=\sqrt{y_1y_2(1+y_1)(1+y_2)}=\sqrt{kx_1\times kx_2}=|k|>2=|OA|^2$,故 C 错;

因为 $|BP|=\sqrt{1+k^2}|x_1|$,$|BQ|=\sqrt{1+k^2}|x_2|$,

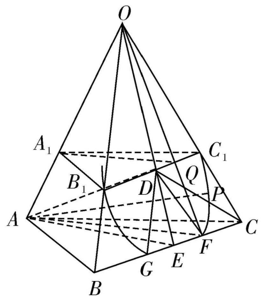
所以 $|BP|\cdot|BQ|=(1+k^2)|x_1x_2|=1+k^2>5$,而 $|BA|^2=5$,故 D 正确. 故选 AD.

12. ACD 【解析】依题意,延长正三棱台侧棱相交于点 O,取 B_1C_1 中点 D,

BC 中点 E,连接 AD,DE,AE,则有 $OA=OB=OC$,

所以 DE 的延长线必过点 O 且 $DE\perp B_1C_1$,$DE\perp BC$,

过点 D 作 $DF/\!/C_1C$,$DG/\!/B_1B$,则四边形 $DFCC_1$ 是边长为 1 的菱形.



如图所示,在 $\triangle OBC$ 中,$\dfrac{B_1C_1}{BC}=\dfrac{OC_1}{OC}=\dfrac{OC_1}{OC_1+C_1C}$,即 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{OC_1}{OC_1+1}$,

解得 $OC_1=2$,所以 $OC=OC_1+C_1C=2+1=3$,

所以 $\triangle OBC$ 是边长为 3 等边三角形,

所以 $\angle DFE=\angle FDC_1=\angle OCB=\dfrac{\pi}{3}$,$OE=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,

所以 $DE=DF\times\sin\dfrac{\pi}{3}=1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

因为 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形且 E 为 BC 中点,所以 $AE=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,$BC\perp AE$,

在 $\triangle OAE$ 中,由余弦定理变形得,$\cos\angle OEA=\dfrac{OE^2+AE^2-OA^2}{2\times OE\times AE}=\dfrac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2-3^2}{2\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{3}$,

在 $\triangle ADE$ 中,由余弦定理变形得,$\cos\angle DEA=\dfrac{DE^2+AE^2-AD^2}{2\times DE\times AE}=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2-AD^2}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{3}$,

解得 $AD=\sqrt{6}$,所以 $AE^2=DE^2+AD^2$,所以 $AD\perp DE$;

由 $BC\perp AE$,$BC\perp OE$,$AE\cap OE=E$,可得 $BC\perp$ 平面 AOE,又 $AD\subset$ 平面 AOE,所以 $BC\perp AD$,

由 $BC\perp AD$,$AD\perp DE$,$BC\cap DE=E$,可得 $AD\perp$ 平面 BCC_1B_1,

因为 AP 与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值为 $\sqrt{6}$,所以 $\dfrac{AD}{DP}=\sqrt{6}$,解得 $DP=1$,$AP=\sqrt{AD^2+DP^2}=\sqrt{6+1}=\sqrt{7}$,所以点 P 在平面 BCC_1B_1 的轨迹为 $\overset{\frown}{C_1F}$,$\overset{\frown}{B_1G}$,

对于 A:当点 P 运动到 DC 与 $\overset{\frown}{C_1F}$ 的交点时 CP 有最小值,因为四边形 $DFCC_1$ 是边长为 1 且 $\angle FDC_1=\dfrac{\pi}{3}$ 的菱形,所以 $DC=\sqrt{3}$,所以 $CP=DC-DP=\sqrt{3}-1$,故 A 选项正确;

对于 B:要使得 $AP\perp BC$,则点 P 必须落在平面 ADE 与平面 BCC_1B_1 的交线上且 $DP=1$,

由图易知,在侧面 BCC_1B_1 内不存在这样的点 P,故 B 选项错误;

对于 C:当点 P 运动到点 F 时,连接 AF,OF,OF 交 B_1C_1 于点 Q,连接 A_1Q,由于平面 $A_1B_1C_1/\!/$ 平面 ABC,

所以 $AF/\!/$ 平面 $A_1B_1C_1$,又 $AF\subset$ 平面 AFO,平面 $AFO\cap$ 平面 $A_1B_1C_1=A_1Q$,

所以 $AF/\!/A_1Q$,所以存在点 P,存在点 $Q\in B_1C_1$,使得 $AP/\!/A_1Q$,故 C 选项正确;

对于 D:设 $\overset{\frown}{C_1F}$ 的长度为 l,则 $l=|\angle FDC_1|\times|DP|=\dfrac{\pi}{3}\times1=\dfrac{\pi}{3}$,

动线段 AP 形成的曲面展开为两个面积相等的扇形,设其中一个的面积为 S,

则有 $S=\dfrac{1}{2}\times l\times|AP|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{3}\times\sqrt{7}=\dfrac{\sqrt{7}\pi}{6}$,

因此所有满足条件的动线段 AP 形成的曲面面积为 $2S=2\times\frac{\sqrt{7}\pi}{6}=\frac{\sqrt{7}\pi}{3}$，故 D 选项正确；

故选 ACD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{7}{8}$　**【解析】** 由 $2\sin\alpha=1+2\sqrt{3}\cos\alpha$，得 $4\sin^2\alpha-4\sqrt{3}\sin 2\alpha+12\cos^2\alpha=1$，

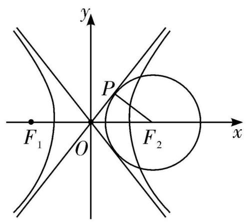
则 $2(1-\cos 2\alpha)-4\sqrt{3}\sin 2\alpha+6(1+\cos 2\alpha)=1$，$4\sqrt{3}\sin 2\alpha-4\cos 2\alpha=7$，

故 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha=\frac{7}{8}$，$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{8}$.

14. 19　**【解析】** 满足条件的分配方案可分为 3 类，第一类每人 2 块，第二类有两人 3 块，两人 1 块，
第三类，一人 3 块，一人一块，2 人 2 块，
属于第一类的分配方案有 1 个，属于第二类的分配方案有 C_4^2 个，即 6 个，
属于第三类的分配方案有 $C_4^2C_2^1$ 个，即 12 个，故满足条件的分配方案的总数为 19 个.

15. $b_n=224-32n(n\in\mathbf{N}^*)$　**【解析】** 由于 $\frac{a_k}{b_k}(1\leqslant k\leqslant 5)$ 是常数，所以 $\frac{a_5}{b_5}=\frac{a_1}{b_1}$，即 $\frac{96}{b_5}=\frac{288}{192}$，所以 $b_5=64$. 因为 $\{b_n\}$ 是等差数列，所以数列 $\{b_n\}$ 的公差 $d=\frac{b_5-b_1}{5-1}=\frac{64-192}{4}=-32$，通项公式为 $b_n=192-32(n-1)=224-32n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

16. ①③④　**【解析】** 对于①，设双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线为 $y=\frac{b}{a}x$，即 $bx-ay=0$，则 $F_2(c,0)$ 到直线 $bx-ay=0$ 的距离为 $\frac{|bc|}{\sqrt{b^2+a^2}}=b$，



因为以 F_2 为圆心的圆与 l 相切于点 P，所以 $|PF_2|=b=4$，

因为 $e=\frac{5}{3}$，即 $\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$，则 $c=\frac{5}{3}a$，又 $a^2+b^2=c^2$，即 $a^2+16=\frac{25}{9}a^2$，所以 $a=3$，$c=5$.

在 Rt$\triangle PF_2O$ 中，$\cos\angle PF_2F_1=\frac{b}{c}=\frac{4}{5}$，在 $\triangle PF_2F_1$ 中，$|F_1F_2|=2c=10$，$|PF_2|=4$，

$|PF_1|^2=|F_1F_2|^2+|PF_2|^2-2|F_1F_2|\cdot|PF_2|\cos\angle PF_2F_1=100+16-2\times10\times4\times\frac{4}{5}=52$，

所以 $|PF_1|=2\sqrt{13}$，故①正确；

对于②，当直线 l 的斜率为 0 时，A，B 两点分别为双曲线的顶点，则 $|AB|=2a=6$，

又因为 $6<\frac{32}{3}$，即 $|AB|$ 的最小值不是 $\frac{32}{3}$，故②错误；

对于③，因为 $|AF_2|=7$，又 $a+c=8$，且 $|AF_2|<a+c$，所以 A 在 C 的右支上，

所以 $|AF_1|-|AF_2|=2a=6$，所以 $|AF_1|=|AF_2|+6=7+6=13$，故 ③正确；

对于④，当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x+5)$，

设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=k(x+5),\\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1,\end{cases}$ 可得 $(16-9k^2)x^2-90k^2x-225k^2-144=0$，

因为直线 l 与双曲线 C 交于左支的两点，

所以，$\begin{cases}16-9k^2\neq0,\\ \Delta=8100k^4+4(16-9k^2)(225k^2+144)>0,\\ x_1+x_2=\frac{90k^2}{16-9k^2}<0,\\ x_1x_2=\frac{225k^2+144}{9k^2-16}>0,\end{cases}$ 解得 $k<-\frac{4}{3}$ 或 $k>\frac{4}{3}$，故④正确.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **【解析】**(1)因为 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列且 a_1，$3a_2$，$9a_3$ 成等差数列，

所以 $6a_2=a_1+9a_3$，所以 $6a_1q=a_1+9a_1q^2$，

即 $9q^2-6q+1=0$，解得 $q=\frac{1}{3}$，所以 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，

所以 $b_n=\frac{na_n}{3}=\frac{n}{3^n}$. ………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可得，$T_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n-1}{3^{n-1}}+\frac{n}{3^n}$，①

$\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}$，②

①−②得 $\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{3^{n+1}}$，

所以 $T_n=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{2\cdot 3^n}$. ………………………………………………………… 10 分

18.【解析】(1)由题意知，$f(x)=\sqrt{m^2+9}\sin(x+\varphi)$，当且仅当 $x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{3}$ 时，函数取得最值，

则有 $\left|\frac{\sqrt{3}m}{2}+\frac{3}{2}\right|=\sqrt{m^2+9}$，得 $(\sqrt{3}m+3)^2=4m^2+36$，

化为 $m^2-6\sqrt{3}m+27=0$，所以 $m=3\sqrt{3}$，所以 $f(x)=3\sqrt{3}\sin x+3\cos x=6\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，

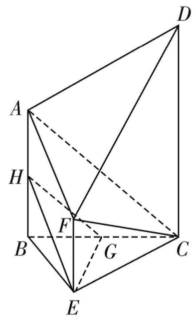
则其单调递增区间为 $\left[2k\pi-\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$. ………………………………… 6 分

(2)设△ABC 各角对应的边分别为 a,b,c，当 $m=\sqrt{3}$ 时，得 $f(A)=2\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$，

又 $A+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$，所以 $A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，得 $A=\frac{\pi}{6}$，由 $a=1$ 及 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $1=b^2+c^2-\sqrt{3}bc$，

所以 $1\geqslant(2-\sqrt{3})bc$，则 $bc\leqslant\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$. ………………………………… 12 分

19.【解析】(1)存在，点 G 为 BC 中点，理由如下：



取线段 AB 的中点 H，连接 EH,HG,EG.

∵$AH/\!/EF$，$AH=EF=2$，∴四边形 $AHEF$ 是平行四边形，∴$HE/\!/AF$.

又∵$AF\subset$平面 AFC，$HE\not\subset$平面 AFC，∴$HE/\!/$平面 AFC.

∵H,G 分别为 AB,BC 的中点，∴HG 是△ABC 的中位线，∴$HG/\!/AC$.

∵$AC\subset$平面 AFC，$HG\not\subset$平面 AFC，∴$HG/\!/$平面 AFC.

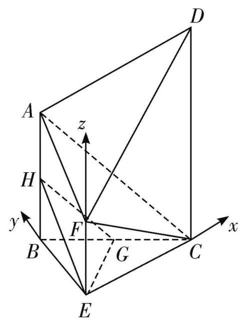
∵$HG\cap HE=H$，$HG,HE\subset$平面 EHG，∴平面 $EHG/\!/$平面 AFC.

∵$EG\subset$平面 EHG，∴$EG/\!/$平面 AFC. ………………………………… 5 分

(2)由 $V_{D\text{-}AFC}=V_{A\text{-}FCD}=V_{B\text{-}FCD}=V_{B\text{-}ECD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot EC\cdot CD\cdot BE=8$，可得 $CD=6$，

以 E 为坐标原点，以 $\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF}$ 的正方向分别为 x,y,z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.

由题可知，$A(0,2,4)$，$F(0,0,2)$，$C(4,0,0)$，$D(4,0,6)$，



设平面 AFC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{FA}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{FC}=(4,0,-2)$，

则 $\begin{cases}2y_1+2z_1=0,\\4x_1-2z_1=0,\end{cases}$ 可以取 $\boldsymbol{m}=(1,-2,2)$，

设平面 AFD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{FA}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{FD}=(4,0,4)$，

则 $\begin{cases}2y_2+2z_2=0,\\4x_2+4z_2=0,\end{cases}$ 可以取 $\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$，

设平面 AFD 与平面 AFC 夹角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴平面 AFD 与平面 AFC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………… 12 分

20.【解析】(1)样本中得分位于 $[70,80)$ 的共有 4 人，得分位于 $[80,90)$ 的有 3 人，

记事件 A：第一次抽出 1 名学生分数在区间 $[70,80)$ 内，

记事件 B：后两次抽出的 2 名学生分数在同一分组区间 $[80,90)$ 内，

则 $P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，$P(AB)=\frac{C_4^1A_3^2}{A_{10}^3}=\frac{4\times3\times2}{10\times9\times8}=\frac{1}{30}$，

由条件概率公式可得 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{30}\times\frac{5}{2}=\frac{1}{12}$. …………………………………………… 6分

(2)由题意知，所有参赛学生中分数在[90,100]的概率为 $\frac{1}{5}$，且 $\xi\sim B\left(3,\frac{1}{5}\right)$，

所以 ξ 的可能取值有0,1,2,3，

故 $P(\xi=0)=C_3^0\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^0\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$，$P(\xi=1)=C_3^1\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{48}{125}$，

$P(\xi=2)=C_3^2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{12}{125}$，$P(\xi=3)=C_3^3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^0=\frac{1}{125}$；

故 ξ 的分布列如下，

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

$E(\xi)=np=3\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$. …………………………………………………………………… 12分

21.【解析】(1)设椭圆 C 与其伴随双曲线 Γ 的离心率分别为 e_1,e_2，

依题意可得 $a^2=3$，$e_1=\frac{\sqrt{2}}{2}e_2$，即 $e_1^2=\frac{1}{2}e_2^2$，即 $\frac{3-b^2}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{3+b^2}{3}$，解得 $b^2=1$，

所以椭圆 C：$\frac{y^2}{3}+x^2=1$，则椭圆 C 伴随双曲线 Γ 的方程为 $\frac{y^2}{3}-x^2=1$. …………………………… 4分

(2)由(1)可知 $F(0,2)$，$E(0,-\sqrt{3})$，设直线 l 的斜率为 k，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则直线 l 的方程为 $y=kx+2$，与双曲线 $\frac{y^2}{3}-x^2=1$ 联立并消去 y 得 $(k^2-3)x^2+4kx+1=0$，

则 $\Delta=12k^2+12>0$，所以 $x_1+x_2=\frac{-4k}{k^2-3}$，$x_1x_2=\frac{1}{k^2-3}<0$，则 $k^2<3$，

又 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{(k^2-3)^2}}=\frac{2\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}}{3-k^2}$，又 $|EF|=2+\sqrt{3}$，

所以 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}|EF|\cdot|x_1-x_2|=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})\frac{2\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}}{3-k^2}=6+3\sqrt{3}$，解得 $k^2=2$ 或 $k^2=\frac{13}{3}$(舍去)，

又 $S=\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\theta$，

所以 $\frac{S}{\tan\theta}=\frac{1}{2}\frac{|OA||OB|\sin\theta}{\tan\theta}=\frac{1}{2}|OA||OB|\cos\theta=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(x_1x_2+y_1y_2)$

$=\frac{1}{2}[x_1x_2+(kx_1+2)(kx_2+2)]=\frac{1}{2}[(1+k^2)x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4]=\frac{1}{2}\left(4+\frac{-7k^2+1}{k^2-3}\right)$，

因为 $k^2=2$，所以 $\frac{S}{\tan\theta}=\frac{1}{2}(4+13)=\frac{17}{2}$. ………………………………………………………… 12分

22.【解析】(1)证明：当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-\sin x-1$，$f'(x)=e^x-\cos x$，

当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$e^x\geqslant1$，且 $\cos x\leqslant1$，

所以当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f'(x)=e^x-\cos x\geqslant0$，且 $x=0$ 时，$f'(x)=0$，

函数 $f(x)=e^x-\sin x-1$ 在$[0,+\infty)$上单调递增，$f(x)\geqslant f(0)=0$，

所以，对 $\forall x\in[0,+\infty)$，$f(x)\geqslant0$. …………………………………………………………… 4分

(2)**法一**：若函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在极值，

则 $f'(x)=ae^x-\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在零点.

①当 $a\in(0,1)$ 时，$f'(x)=ae^x-\cos x$ 为 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的增函数，

$f'(0)=a-1<0$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=ae^{\frac{\pi}{2}}>0$，

则存在唯一实数 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(x_0)=0$ 成立，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减；

当 $x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

所以 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点；

②当 $a\geqslant1$ 时，$f'(x)=ae^x-\cos x\geqslant e^x-\cos x>0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，

函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上无极值；

③当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)=ae^x-\cos x<0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，

函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上无极值.

综上知，使 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在极值的 a 的取值范围是 $(0,1)$. ………………………………………… 12 分

法二：若函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在极值，则 $f'(x)=ae^x-\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在零点，

令 $f'(x)=0$，则 $a=\frac{\cos x}{e^x}$，令 $g(x)=\frac{\cos x}{e^x}\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，

方程 $f'(x)=0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上有实根，即函数 $y=a$ 与函数 $g(x)=\frac{\cos x}{e^x}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上有交点.

由 $g(x)=\frac{\cos x}{e^x}$，得 $g'(x)=\frac{-\sin x-\cos x}{e^x}=\frac{-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{e^x}$，

显然，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

则 $0=g\left(\frac{\pi}{2}\right)<g(x)<g(0)=1$，

所以，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，若 $y=a$ 与 $g(x)$ 有交点，则 a 的取值范围是 $(0,1)$.

即当 $a\in(0,1)$ 时，存在唯一实数 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(x_0)=0$ 成立，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减；

当 $x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

所以 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点.

综上知，若函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在极值，则 a 的取值范围是 $(0,1)$. ……………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。