2023届4月质量监测考试

理科数学参考答案

1. B　解析：因为全集 $U=\{x\in N|0<\log_2x<3\}=\{2,3,4,5,6,7\}$，$A\cup B=\{2,4,5,6\}$，
所以 $C_U(A\cup B)=\{3,7\}$，故选：B.

2. D　解析：$\because(6-8\mathrm{i})\cdot z=25\cdot\left|-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right|$，$\therefore(6-8\mathrm{i})\cdot z=25\cdot\left|-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right|=25\times2$，
$\therefore z=\dfrac{25}{3-4\mathrm{i}}=3+4\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=3-4\mathrm{i}$. 故选：D.

3. D　解析：$\because5^y=20\Leftrightarrow y=\log_520$，$x=\log_{0.4}0.15>\log_{0.4}0.16=2$
$y=\log_520$，由 $\log_55<\log_520<\log_525$，即 $1<\log_520<2$，故 $1<y<2$
$\therefore1<y<x$，可得 $z=0.4^{0.5}<0.4^0=1$，即 $z<1$
综上：$z<y<x$，故选：D.

4. A　解析：由题意，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，解之得 $\overrightarrow{BA}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BE}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CE}$，即 $\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BE}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CE}$. 故选：A.

5. D　解析：因为 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$

$=(\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\theta+\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\theta)(\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\theta-\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\theta)$

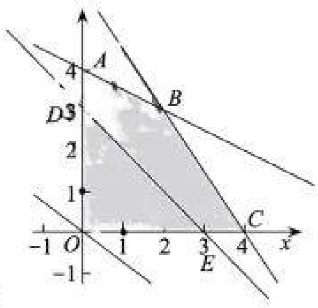
$=\dfrac{1}{2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta})$

$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta})$

所以 $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore\tan^2\theta=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 故选：D.

6. A　解析：设食品厂生产A和B半成品食物分别为 x、y 吨，



由题意可列 $\begin{cases}3x+2y\leqslant12\\x+2y\leqslant8\\x\geqslant0\\y\geqslant0\end{cases}$，其表示如图阴影部分区域，$B(2,3)$，
其面积为10.
由题意，$z=3x+3y\leqslant9$ 与 x 轴，y 轴围成的图形面积为 $\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}$，
故每天可获利润不超过9万元的概率为 $\dfrac{9}{20}$. 故选：A.

7. C　解析：如图：由于木材直径为D，
$W=\dfrac{1}{6}BH^2=\dfrac{1}{6}\sqrt{D^2-H^2}\cdot H^2=\dfrac{1}{6}\sqrt{(D^2-H^2)\cdot H^4}$，
设 $g(H)=(D^2-H^2)\cdot H^4$，

所以$g'(H)=-6H^3(H^2-\frac{2}{3}D^2)=0$，$\therefore H=\frac{\sqrt{6}}{3}D$，

因为$g(H)$只有一个极值点，

所以$H=\frac{\sqrt{6}}{3}D$时，W最大，此时$B=\frac{\sqrt{3}}{3}D$，即H：$B=\sqrt{2}$：1，故选C.

8. A　**解析：**根据题意，$A(-2,0)$，$B(2,0)$，$C(0,4)$，设$\triangle ABC$外接圆方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

则$\begin{cases}4-2D+F=0\\4+2D+F=0\\16+4E+F=0\end{cases}$，　解得$\begin{cases}D=0\\E=-3.\\F=-4\end{cases}$

$\therefore\triangle ABC$外接圆方程为$x^2+y^2-3y-4=0$，即$x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

则圆心$\left(0,\frac{3}{2}\right)$到到直线$l$：$3x-4y-9=0$的距离为$\frac{\left|3\times0-4\times\frac{3}{2}-9\right|}{5}=3$.

故外接圆上一点P到直线l：$3x-4y-9=0$的最小距离为$3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$.故选：A.

9. C　**解析：**因为$P(58.8<X<82.8)=1-2P(X>82.8)=0.8$，由题意知：抽查该校大学生6人，恰好有$k$人的舒张压落在$(58.8,82.8)$内的概率为$C_6^k\cdot(0.2)^{6-k}\cdot(0.8)^k$，要使此式最大，有$\begin{cases}C_6^k\cdot(0.2)^{6-k}\cdot(0.8)^k\geqslant C_6^{k-1}\cdot(0.2)^{7-k}\cdot(0.8)^{k-1}\\C_6^k\cdot(0.2)^{6-k}\cdot(0.8)^k\geqslant C_6^{k+1}\cdot(0.2)^{5-k}\cdot(0.8)^{k+1}\end{cases}$，

化简得$\begin{cases}0.8\times\frac{7-k}{k}\geqslant0.2\\0.2\geqslant0.8\times\frac{6-k}{k+1}\end{cases}$，解得$\frac{23}{5}\leqslant k\leqslant\frac{28}{5}$，故$k=5$.故选：C.

10. D　**解析：**因为$f(x+1)+f(3-x)=0$，所以$f(2-x)=-f(x)$，故$f(x)$关于点$(1,0)$对称.

$\because f(-2x+1)=f(3+2x)$，$\therefore f(4-x)=f(x)$，故$f(x)$关于直线$x=2$对称.

由$f(4-x)=-f(2-x)$，所以$f(x)$的周期为4.

当$x\in[1,2]$时，$2-x\in[0,1]$，所以$f(x)=-f(2-x)=(x-1)^3$，

同理可得$x\in[2,4]$时，$f(x)=(3-x)^3$

当$x\in[0,4]$时，$f(x)>\frac{1}{8}$的解集为$(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$，

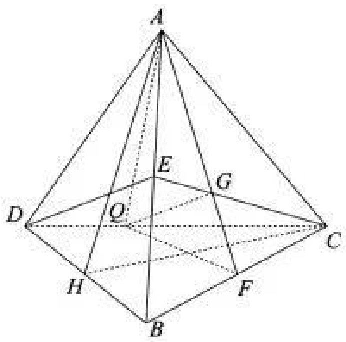
所以$f(x)>\frac{1}{8}$在实数集上的解集为$(4k+\frac{3}{2},4k+\frac{5}{2})$，$k\in Z$

令k=2，可知D正确.故选：D.

11. D　**解析：**取BD的中点H，连接AH、CH，

如图，$CH\perp BD$，$AH\perp BD$，

而$CH\subset$平面AHC，$AH\subset$平面AHC，$CH\cap AH=H$，于是得$BD\perp$平面AHC，又$AC\subset$平面AHC，所以$BD\perp AC$.故①正确;来源：高三答案公众号



当$\frac{CQ}{DQ}=2$时，连接CE交AF于G，连接QG，F、E分别是BC、AB的中点，

则G是$\triangle PBC$的重心，有$\frac{CG}{GE}=2$，即有$\frac{CQ}{DQ}=\frac{CG}{GE}$，因此

$QG // DE$，

而 $DE \not\subset$ 平面 AFQ，$QG \subset$ 平面 PFD，所以 $DE //$ 平面 AFQ，故②正确；

由二面角平面角的定义，$\angle AHC = 120°$，设 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CBD$ 的外心为 O_1 与 O_2，过 O_1 作垂直于平面 $\triangle ABD$ 的直线 l_1，过 O_2 作垂直于平面 $\triangle CBD$ 的直线 l_2，则 l_1 与 l_2 的的交点即为外接球的球心O，故 O，O_1，H，O_2 四点共圆，所以 $\angle HOO_2 = 30°$，故 $OO_2 = HO_2 \tan\angle OHO_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = 1$，故 $R = \sqrt{OO_2^2 + CO_2^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$，从而外接球的表面积为 $4\pi R^2 = \frac{28}{3}\pi$，故③正确；

当平面 ABD 与平面 CBD 垂直时，A到平面 CBD 的距离最大，等于 $\sqrt{3}$，故三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大值为 $\frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$，故④正确．故选：D.

12. C　**解析**：当 $k \in \mathbf{N}^*$ 时，$a_{2k+1} = a_{2k} + 1 = a_{(2k-1)} + 1 = \frac{2k+1}{2k-1} a_{2k-1}$，即 $\frac{a_{2k+1}}{2k+1} = \frac{a_{2k-1}}{2k-1}$.

所以当 n 为奇数时，$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是常数列．来源：高三答案公众号

又 $a_1 = 1$，所以当 n 为奇数时，$\frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{1} = 1$，即 $a_n = n$.

当 n 为偶数时，$a_n = a_{n+1} - 1 = n + 1 - 1 = n$，

所以当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时，$a_n = n$．设 $b_n = \frac{n+2}{a_{n+1} \cdot a_n \cdot 2^{n+1}}$，则 $b_n = \frac{n+2}{n(n+1) \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{n \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}$

故 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots\dots + b_n = \left(\frac{1}{1 \times 2^1} - \frac{1}{2 \times 2^2}\right) + \left(\frac{1}{2 \times 2^2} - \frac{1}{3 \times 2^3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}\right)$

$= \frac{1}{1 \times 2^1} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} < \frac{1}{2}$，当 n 趋向于无穷大时，前 n 和趋向于 $\frac{1}{2}$.

所以 M 的最小值为 $\frac{1}{2}$．故选：C.

13. $x + 2y + 4\ln 2 = 0$　**解析**：因为 $f'(x) = -\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$，所以 $f'(2) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$．所以切线方程为 $y + 1 + 2\ln 2 = -\frac{1}{2}(x - 2)$，整理可得，$x + 2y + 4\ln 2 = 0$.

14. 2　**解析**：由题意，$2^n = 64$，$\therefore n = 6$，而 $(x - my)^6$ 的通项公式为 $C_6^r x^{6-r}(-my)^r$，所以 x^3y^3 的系数为 $C_6^3(-m)^3$，$\therefore C_6^3(-m)^3 = -160$，$\therefore m = 2$.

15. $\frac{\pi}{6}$　**解析**：函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi)(0 < \varphi < \pi)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后，

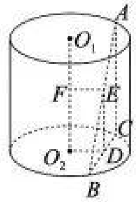
得到的图象对应的解析式是：$y = \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \varphi\right] = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$，

由于该函数为偶函数，故 $-\frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi$，$k \in Z$，因为 $0 < \varphi < \pi$，所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$，

函数 $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的减区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}\right]$，$k \in Z$，而函数又在 $[-a, a]$ 上单调递减，

所以$\begin{cases} -\frac{\pi}{6} \leqslant -a \\ \frac{\pi}{3} \geqslant a \end{cases}$，于是$0 < a \leqslant \frac{\pi}{6}$.故$a$的最大值为$\frac{\pi}{6}$.

16.2 **解析**：设过A，B与l垂直的平面为α，β. l与α交于O_1，l与β交于O_2，α内以O_1为圆心的圆过A，β内以O_2为圆心的圆过B，设$AC \perp \beta$于C，设AB中点为E，OO_1中点为F，BC中点为D，则$O_2D=EF=1$. 因为$\angle BAC = 30°$，$AB = 4$，所以$BC = 2$，$AC = 2\sqrt{3}$.所以$BD = 1$.所以$O_2B = \sqrt{2}$，即$O_1A = \sqrt{2}$.即$(\sqrt{2}, \sqrt{3})$是曲线$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$上的点，其中$a = 1$，所以$b^2 = 3$，所以离心率$e = 2$.



17.解：(1) 因为$\sin A \sin B = \sin^2 A - 2\sin^2 B$，所以$ab = a^2 - 2b^2$，

解之得$a = 2b$.……(2分)

因为$S = 3\pi$，所以$2R = 2\sqrt{3}$，所以$2R = \frac{c}{\sin C}$，$\therefore \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$C = \frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$. ……(3分)

当$C = \frac{\pi}{3}$，$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$，$\therefore 9 = 5b^2 - 4b^2 \times \frac{1}{2} = 3b^2$，$\therefore b = \sqrt{3}$，$a = 2\sqrt{3} > c$(舍)，

……(5分)

当$C = \frac{2\pi}{3}$，$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$，$\therefore 9 = 5b^2 + 4b^2 \times \frac{1}{2} = 7b^2$，$\therefore b = \frac{3\sqrt{7}}{7}$，$a = \frac{6\sqrt{7}}{7} < c$，

故$b = \frac{3\sqrt{7}}{7}$. ……(7分)

(2) 因为$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}$，所以$\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}CD \cdot b\sin\angle ACD + \frac{1}{2}CD \cdot a\sin\angle BCD$

……(9分)

所以$\frac{1}{2} \times \frac{6\sqrt{7}}{7} \times \frac{3\sqrt{7}}{7}\sin 120° = \frac{1}{2}CD \cdot \frac{3\sqrt{7}}{7}\sin 60° + \frac{1}{2}CD \cdot \frac{6\sqrt{7}}{7}\sin 60°$. ……(10分)

故$CD = \frac{2\sqrt{7}}{7}$. ……(12分)

18.解：(1)(1) 连接OF，O_1O，因为O为CD的中点，所以$OF//CE$， ……(1分)

又$CE \subset$平面AEC，$OF \not\subset$平面AEC，所以$OF//$平面AEC，

由四边形O_1AEO为矩形，所以$O_1O//AE$，……(2分)

又$AE \subset$平面AEC，$O_1O \not\subset$平面AEC，所以$O_1O//$平面AEC，……(3分)

因为$O_1O \cap OF = O$，O_1O，$OF \subset$平面O_1OF，

所以平面O_1OF // 平面AEC， ……(4分)

因为$O_1F \subset$平面DOF，

所以O_1F // 平面ACE， ……(5分)

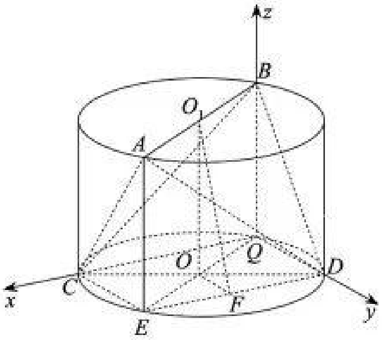
(2) 分别过B作圆柱的母线BQ，连结CQ，DQ，可知AB // EQ，所以$\angle COE$为异面直线AB与CD所成的角（或其补角），故$\angle COQ = 60°$或$120°$，又$CE > DE$，故$\angle COQ = 60°$.

……(6分)

设$CQ = a$，圆柱的高为h，所以$CE = \sqrt{3}a$，

以Q为原点，QC为x轴，QD为y轴，QB为z轴建立空间直角坐标系Q-xyz，则$A(a, \sqrt{3}a, h)$，$C(a, 0, 0)$，$B(0, 0, h)$，$D(0, \sqrt{3}a, 0)$，$\therefore \overrightarrow{AC} = (0, -\sqrt{3}a, -h)$，

$\overrightarrow{AB}=(-a,\ -\sqrt{3}a,\ 0)$，$\overrightarrow{DB}=(0,\ -\sqrt{3}a,\ h)$，$\overrightarrow{DC}=(a,\ -\sqrt{3}a,\ 0)$， …………… (7分)



设平面ABC的法向量为$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}ax+\sqrt{3}ay=0\\ \sqrt{3}ay+hz=0\end{cases}$，令$y=1$，则$\vec{n}=\left(-\sqrt{3},\ 1,\ -\dfrac{\sqrt{3}a}{h}\right)$ …………………… (8分)

同理可得平面BCD的法向量为$\vec{m}=\left(\sqrt{3},\ 1,\ \dfrac{\sqrt{3}a}{h}\right)$， …………………………………… (9分)

设锐二面角A-BC-D的平面角为θ，则

$|\cos\theta|=\left|\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\left|\dfrac{-3+1-\dfrac{3a^2}{h^2}}{4+\dfrac{3a^2}{h^2}}\right|=\dfrac{5}{7}$，解之得，$a=h$， …………………………………… (11分)

计算可得底面圆的直径为$2a$，

故圆柱的高与底面圆的直径的比值为1：2. …………………………………………………… (12分)

19. 解：(1) 设零假设为H_0：同学的红包保存情况与年龄大小无关.

根据数表可得$\chi^2=\dfrac{100(15\times50-25\times10)^2}{75\times25\times60\times40}=\dfrac{50}{9}>5.024$. ………………………………… (2分)

所以零假设H_0是错的，

故有97.5%的把握可以认为同学的红包保存情况与年龄大小有关. ………………………… (4分)

(2) (i) 设“恰好2次就能全部判断红包情况”为事件A，

则$P(A)=\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

(ii) 由题意，$X=0$，100，200，300，

所以$P(X=0)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{4}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{C_2^2}{C_4^2}=\dfrac{5}{36}$；$P(X=100)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{C_2^1}{C_4^2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{C_4^3}=\dfrac{20}{72}$

$P(X=200)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{C_2^1}{C_4^2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{C_4^3}=\dfrac{20}{72}$；$P(X=300)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{C_4^2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{C_3^1}{C_4^3}=\dfrac{22}{72}$

随机变量X的分布列为

X	0	100	200	300
P	$\frac{10}{72}$	$\frac{20}{72}$	$\frac{20}{72}$	$\frac{22}{72}$

故$E(X)=0\times\dfrac{10}{72}+100\times\dfrac{20}{72}+200\times\dfrac{20}{72}+300\times\dfrac{22}{72}=175$.

20. 解：(1) 设$F_2(c,\ 0)$，则$\angle AF_2B=120°$，所以$2b=\sqrt{3}a$，$\therefore b=\sqrt{3}c$. ………………… (1分)

设椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4c^2}+\dfrac{y^2}{3c^2}=1$，即$3x^2+4y^2-12c^2=0$，

$\because AF_2=a$，$OF_2=c$，$a=2c$，

$\therefore \angle AF_2O=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore \triangle AF_1F_2$为正三角形，

$\because$过F_1且垂直于AF_2的直线与C交于D，E两点，DE为线段AF_2的垂直平分线，

$\therefore$直线DE的斜率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，斜率倒数为$\sqrt{3}$，…………………………………………（3分）

直线DE的方程：$x=\sqrt{3}y-c$，代入椭圆方程$3x^2+4y^2-12c^2=0$，

整理化简得到：$13y^2-6\sqrt{3}cy-9c^2=0$，

判别式$\Delta=\left(6\sqrt{3}c\right)^2+4\times13\times9c^2=6^2\times16\times c^2$，

$\therefore |DE|=\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}\,|y_1-y_2|=2\times\dfrac{\sqrt{\Delta}}{13}=2\times6\times4\times\dfrac{c}{13}=\dfrac{48}{13}$.…………………………（4分）

$\therefore c=1$，所以$a=2$.

故椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.……………………………………………………（5分）

（2）设$P(x_1,\ y_1)$，在P点处的切线的方程为$y=k(x-x_1)+y_1$，.

由$\begin{cases}y=k(x-x_1)+y_1\\3x^2+4y^2-12=0\end{cases}$，消去$(3+4k^2)x^2+8k(y_1-kx_1)x+4(y_1-kx_1)^2-12=0$

则$\Delta=64k^2(y_1-kx_1)^2-4(3+4k^2)[4(y_1-kx_1)^2-12]=0$，…………………………（7分）

整理得，$(4-x_1^2)k^2+2x_1y_1k+3-y_1^2=0$，

解之得

$$k=\frac{-2x_1y_1\pm\sqrt{(2x_1y_1)^2-4(4-x_1^2)(3-y_1^2)}}{2(4-x_1^2)}$$

$=\dfrac{-2x_1y_1}{2(4-x_1^2)}=\dfrac{-x_1y_1}{4-x_1^2}=\dfrac{-x_1y_1}{\frac{4}{3}y_1^2}=-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x_1}{y_1}$

故在P点处的切线方程为$y=-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{x_1}{y_1}(x-x_1)+y_1$，

整理可得$\dfrac{x_1x}{4}+\dfrac{y_1y}{3}=1$.……………………………………………………………（8分）

当k不存在时，切线方程为$x=\pm2$满足上述结论.

设Q坐标为$Q(x_2,\ y_2)$，同理可得$\dfrac{x_2x}{4}+\dfrac{y_2y}{3}=1$，…………………………………（9分）

设$M(x_0,\ 4-x_0)$，则$\begin{cases}\dfrac{x_1x_0}{4}+\dfrac{y_1(4-x_0)}{3}=1\\\dfrac{x_2x_0}{4}+\dfrac{y_2(4-x_0)}{3}=1\end{cases}$，

所以PQ的直线方程为$\dfrac{xx_0}{4}+\dfrac{y(4-x_0)}{3}=1$

所以$\left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3}\right)x_0+\dfrac{4y}{3}-1=0$，………………………………………………（10分）

由题意，$\begin{cases}\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3}=0\\\dfrac{4y}{3}-1=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{3}{4}\end{cases}$

故直线PQ过定点$\left(1,\ \dfrac{3}{4}\right)$.………………………………………………………………（12分）

21. 解：（1）由题意可知：$f(0)=0$，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a(x+1)e^x$，

则$f''(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}-a(x+2)e^x<0$，　（1分）

所以$f'(x)$在$(-1,\ +\infty)$上单调递减，

当$x\in(-1,\ 0)$时，$f'(x)>f'(0)=1-a>0$，

此时$f(x)$单调递增，$f(x)<f(0)=0$，故函数无零点．…………………………………… （2分）

下证：当$x\in(-1,\ +\infty)$时，$\ln(x+1)\leqslant x$，

令$g(x)=\ln(x+1)-x$，则$g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=\dfrac{-x}{x+1}$，

当$-1<x<0$时，$g'(x)>0$；当$x>0$时，$g'(x)<0$，

所以$g(x)$在$(-1,\ 0)$上单调递增，在$(0,\ +\infty)$上单调递减，

故$g(x)\leqslant g(0)=0$，也即$\ln(x+1)\leqslant x$，故$e^x\geqslant x+1$，…………………………………… （4分）

当$x\in(0,\ +\infty)$时，$f'(x)$单调递减，$f'(0)=1-a>0$，

$$f'\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{\frac{1}{a}+1}-a\left(\frac{1}{a}+1\right)e^{\frac{1}{a}}\leqslant\frac{1}{\frac{1}{a}+1}-a\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{a}+1\right)=\frac{-a^3-2a^2-3a-1}{a(a+1)}<0,$$

所以存在唯一的$x_0\in\left(0,\ \dfrac{1}{a}\right)$，使得$f'(x_0)=0$．…………………………………… （6分）

所以$f(x)$在$(0,\ x_0)$上单调递增，在$(x_0,\ +\infty)$上单调递减，$f(x_0)>f(0)=0$，　……… （7分）

$\therefore f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{a}+1\right)-a\cdot\dfrac{1}{a}e^{\frac{1}{a}}=\ln\left(\dfrac{1}{a}+1\right)-e^{\frac{1}{a}}<\dfrac{1}{a}-\left(\dfrac{1}{a}+1\right)=-1<0$，

所以在$(0,\ +\infty)$上存在一个零点．

综上：函数$f(x)$恰有两个零点．…………………………………… （9分）

（2）由（1）可知，$\ln(x+1)<x<e^x$在$[1,\ +\infty)$上恒成立．　………………………… （10分）

于是可得$\ln 2<e$，$\ln 3<e^2$，$\ln 4<e^3$，…，$\ln n<e^{n-1}$，其中$n\in N$，$n\geq 2$．

以上各式左右相加得，$\ln 2+\ln 3+\ln 4+\cdots+\ln n<e+e^2+e^3+\cdots+e^{n-1}$，　……… （11分）

所以$\ln 1+\ln 2+\ln 3+\ldots\ldots+\ln n<\dfrac{e^n-e}{e-1}$．…………………………………… （12分）

22.（本小题满分10分）解：以极点为原点，极轴为x轴的正半轴，建立平面直角坐标系，

$\because \rho_1\cos\dfrac{\pi}{3}=2$，$\therefore \rho_1=4$，故$x=4\cos\dfrac{\pi}{3}=2$，$y=4\sin\dfrac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$，

所以M点坐标为$(2,\ 2\sqrt{3})$．…………………………………… （2分）

又$\rho_2=4\sqrt{3}\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$，所以$x=2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6}=3$，$y=2\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$，

所以N点坐标为$(3,\ \sqrt{3})$．…………………………………… （4分）

由$\rho^2\cos 2\theta=4$得：$\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=4$，来源：高三答案公众号

故曲线C的直角坐标方程为：$x^2-y^2=4$．…………………………………… （5分）

（2）因为$k_{AB}=-\sqrt{3}$，所以AB普通方程为$y=-\sqrt{3}x+4\sqrt{3}$，故$P(0,\ 4\sqrt{3})$，　……… （6分）

设AB的参数方程为$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}t\\ y=4\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$，$t$为参数，与$x^2-y^2=4$．

联立得到，$t^2+24t+104=0$，

所以$t_1+t_2=-24$，$t_1t_2=104$， ……………………………………………… (8分)

所以$\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}=\dfrac{1}{|t_1|}+\dfrac{1}{|t_2|}=\dfrac{|t_1|+|t_2|}{|t_1\cdot t_2|}=\dfrac{|t_1+t_2|}{|t_1\cdot t_2|}=\dfrac{24}{104}=\dfrac{3}{13}$ ……………………… (10分)

23. 解：(1) 当$x\geqslant 2$时，$f(x)=(x-1)x+(x-2)(x-1)=2(x-1)^2\geqslant 0$，所以$x\in\phi$…… (1分)

当$1<x<2$时，$f(x)=(x-1)x+(2-x)(x-1)=2(x-1)\leqslant 0$，$\therefore x\leqslant 1$，所以$x\in\phi$

……………………………………………………………………………… (3分)

当$x\leqslant 1$时，$f(x)=(1-x)x+(2-x)(x-1)=-2(x-1)^2\leqslant 0$，$\therefore x\leqslant 1$，

综上，$M=1$ ……………………………………………………………… (5分)

(2) 由于$[(a+2)+(b-1)+(c+1)]^2$

$=(a-2)^2+(b-1)^2+(c+1)^2+2[(a-2)(b-1)+(b-1)(c+1)+(c+1)(a-2)]$

$\leqslant 3[(a-2)^2+(b-1)^2+(c+1)^2]$， (8分)

所以$(a-2)^2+(b-1)^2+(c+1)^2\geqslant\dfrac{[(a-2)+(b-1)+(c+1)]^2}{3}=\dfrac{(a+b+c-2)^2}{3}=\dfrac{1}{3}$，

故$(a-2)^2+(b-1)^2+(c+1)^2\geqslant\dfrac{1}{3}$. ……………………………………… (10分)