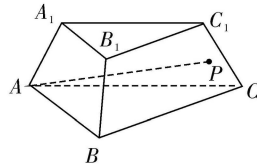


★11. 已知 O 为坐标原点, 点 $A(1, 1)$ 在抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 上, 过点 $B(0, -1)$ 的直线交 C 于 P, Q 两个不同的点, 则

- A. C 的准线为 $y = -\frac{1}{4}$ B. 直线 AB 与 C 相交
C. $|OP| \cdot |OQ| \geq |OA|^2$ D. $|BP| \cdot |BQ| > |BA|^2$

12. 如图, 已知正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 的上、下底面边长分别为 2 和 3, 侧棱长为 1, 点 P 在侧面 BCC_1B_1 内运动 (包含边界), 且 AP 与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值为 $\sqrt{6}$, 则



- A. CP 长度的最小值为 $\sqrt{3} - 1$
B. 存在点 P , 使得 $AP \perp BC$
C. 存在点 P , 存在点 $Q \in B_1C_1$, 使得 $AP \parallel A_1Q$
D. 所有满足条件的动线段 AP 形成的曲面面积为 $\frac{\sqrt{7}\pi}{3}$

选择题答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答案													

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $2\sin \alpha = 1 + 2\sqrt{3}\cos \alpha$, 则 $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{6}) =$ _____.
14. 将 8 块完全相同的巧克力分配给 A, B, C, D 四人, 每人至少分到 1 块且最多分到 3 块, 则不同的分配方案共有 _____ 种 (用数字作答).
15. 已知 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个等差数列, 且 $\frac{a_k}{b_k} (1 \leq k \leq 5)$ 是常值, 若 $a_1 = 288$, $a_5 = 96$, $b_1 = 192$, 则 $\{b_n\}$ 的通项公式为 _____.
16. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 以 F_2 为圆心, 4 为半径的圆与 C 的一条渐近线切于点 P , 过 F_1 的直线 l 与 C 交于 A, B 两个不同的点, 若 C 的离心率 $e = \frac{5}{3}$, 则下列结论中正确的序号有 _____.
- ① $|PF_1| = 2\sqrt{13}$;
② $|AB|$ 的最小值为 $\frac{32}{3}$;
③ 若 $|AF_2| = 7$, 则 $|AF_1| = 13$;
④ 若 A, B 同在 C 的左支上, 则直线 l 的斜率 $k \in (-\infty, -\frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

★17. (10 分) 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{na_n}{3}$. 已知

$a_1, 3a_2, 9a_3$ 成等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分) 设函数 $f(x) = m\sin x + 3\cos x (m \in \mathbf{R})$.

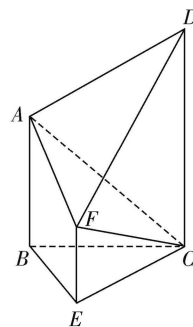
(1) 若函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=n$ (n 为常数) 相邻两个交点的横坐标

为 $x_1 = \frac{\pi}{12}, x_2 = \frac{7\pi}{12}$, 求函数 $f(x)$ 的解析式, 并写出函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 当 $m = \sqrt{3}$ 时, 满足 $f(A) = 2\sqrt{3}$, 且 $a = 1$, 求 bc 的最大值.

19. (12分) 如图, 多面体 $AFDCBE$ 中, $AB \perp$ 平面 BCE , $AB \parallel CD \parallel EF$, $BE \perp EC$, $AB=4$, $EF=2$, $EC=2BE=4$.

- (1) 在线段 BC 上是否存在一点 G , 使得 $EG \parallel$ 平面 AFC ? 如果存在, 请指出 G 点位置并证明; 如果不存在, 请说明理由.
- (2) 当三棱锥 $D-AFC$ 的体积为 8 时, 求平面 AFD 与平面 AFC 夹角的余弦值.



20. (12分)为庆祝我校建校 120 周年,高三年级开展了校史知识问答竞赛,参赛人员所得分数的分组区间为 $[60,70)$, $[70,80)$, $[80,90)$, $[90,100]$,由此得到总体的频率统计表:

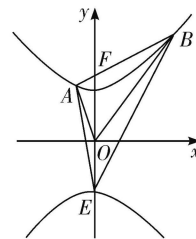
分数区间	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100]$
频率	0.1	0.4	0.3	0.2

- (1)若从总体中利用分层随机抽样(按分数的分组区间分层)的方式随机抽取 10 名学生进行进一步调研. 从这 10 名参赛学生中依次抽取 3 名进行调查分析,求在第一次抽出 1 名学生分数在区间 $[70,80)$ 内的条件下,后两次抽出的 2 名学生分数在 $[80,90)$ 的概率;
- (2)视频率为概率,在所有参赛学生中任取 3 人,记取出的 3 人中分数在 $[90,100]$ 的人数为 ξ ,求 ξ 的分布列和数学期望.

21. (12分) 对于椭圆: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 我们称双曲线: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 为其伴随双曲线. 已知椭圆 $C: \frac{y^2}{3} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (0 < b < \sqrt{3})$, 它的离心率是其伴随双曲线 Γ 离心率的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍.

(1) 求椭圆 C 伴随双曲线 Γ 的方程;

(2) 如图, 点 E, F 分别为 Γ 的下顶点和上焦点, 过 F 的直线 l 与 Γ 上支交于 A, B 两点, 设 $\triangle ABO$ 的面积为 S , $\angle AOB = \theta$ (其中 O 为坐标原点). 若 $\triangle ABE$ 的面积为 $6 + 3\sqrt{3}$, 求 $\frac{S}{\tan \theta}$.



22. (12分) 已知函数 $f(x) = ae^x - \sin x - 1$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, e 是自然对数的底数.

(1) 当 $a=1$ 时, 证明: 对 $\forall x \in [0, +\infty)$, $f(x) \geq 0$;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上存在极值, 求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

