

2024 届“耀正优+”12 月高三名校阶段检测联考

数 学

考生注意：

1. 本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围：必修一，必修二，选择性必修一，选择性必修二。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $zi - 2z = -1$ (其中 i 为虚数单位)，则复数 z 的实部与虚部的和为 ()
A. $\frac{1}{3}$ B. 1 C. -1 D. -2
2. 设集合 $A = \{x | 2^x < -x + 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} | \ln(-x) < 1\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()
A. $(-e, +\infty)$ B. $(-e, 0)$ C. $\{-3, -2, -1\}$ D. $\{-2, -1\}$
3. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 > 0$, 则“ $a_1 < a_2$ ”是“对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $S_n < S_{n+1}$ ”成立的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件
4. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 A , 上顶点为 B , 右焦点为 F , 若直线 BF 与以 A 为圆心半径为 $\frac{1}{2}b$ 的圆相切，则椭圆离心率等于 ()
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
5. 已知等差数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 \neq 0$, 且满足 $3a_2, S_3, a_{10}$ 成等比数列，则 $\frac{a_{10}}{a_5}$ 等于 ()
A. $\frac{8}{3}$ 或 $\frac{12}{7}$ B. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{12}{7}$ D. 2

【高三年级名校阶段检测联考·数学 第 1 页(共 6 页)】

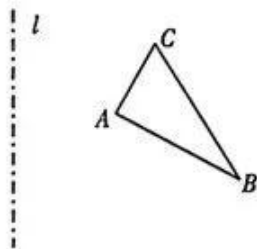
6. 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\cos(\alpha + \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha)$ 的值为()

- A. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

7. 已知函数 $f(x) = m\cos x + \sin x + n$ 在区间 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 上存在零点, 则 $m^2 + n^2$ 的最小值为() 来源: 高三答案公众号

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

8. Paul Guldin(古尔丁)定理又称帕普斯几何中心定理, 其内容为: 面积为 S 的封闭的平面图形绕同一平面内且不与之相交的轴旋转一周产生的曲面围成的几何体, 若平面图形的重心到轴的距离为 d , 则形成的几何体体积 V 等于该平面图形的面积与该平面图形重心到旋转轴的垂线段为半径所画的圆的周长的积, 即 $V = 2\pi dS$. 现有一工艺品, 其底座是 $\triangle ABC$ 绕同一平面内的直线 l (如图所示) 旋转围成的几何体. 测得 $AB = 10\sqrt{3}$ cm, $AC = 10$ cm, $BC = 20$ cm, 上口直径为 36 cm, 下口直径 56 cm, 则该底座的体积为()



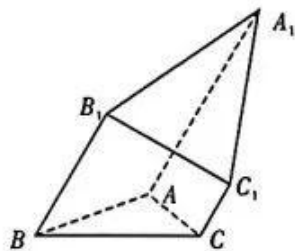
- A. $\frac{4900\sqrt{3}\pi}{3}$ cm³ B. $\frac{5900\sqrt{3}\pi}{3}$ cm³ C. $1800\sqrt{3}\pi$ cm³ D. $2300\sqrt{3}\pi$ cm³

二、选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$, $g(x) = \sin^2(x - \frac{\pi}{4})$, 则以下结论正确的是()

- A. 函数 $g(x)$ 的周期为 π
 B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, \frac{1}{2})$ 成中心对称
 C. 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有偶数个交点
 D. 当 $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, $f(x) < g(x)$

10. 如图, 已知多面体 $ABC-A_1B_1C_1$, 底面 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, AA_1, BB_1, CC_1 两两平行, 且 $AA_1 = 3, BB_1 = 2, CC_1 = 1$, BA, BC, BB_1 两两所成角为 $\frac{\pi}{3}$. 则以下结论正确的是()



- A. $AB \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$
 B. B_1C_1 与 AA_1 垂直
 C. 点 B_1 到平面 ABC 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
 D. 多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $2\sqrt{2}$

【高三年级名校阶段检测联考·数学 第 2 页(共 6 页)】



11. 已知 $x \geq 0, y \geq 0$, 且满足 $x+2y=1$, 则以下结论正确的是()

- A. xy 的最大值为 $\frac{1}{4}$
 B. $2^x + 4^y$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$
 C. $x^2 + y^2$ 取最小值时 $x = \frac{2}{5}$
 D. $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{y+1}$ 的最小值为 2

12. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1}^2 = a_n + 2, n \in \mathbf{N}^*$, 则以下结论正确的是()

- A. 若 $a_1 \in (0, 2)$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 单调递减
 B. 若 $a_1 \in (2, +\infty)$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 单调递增
 C. 若 $a_1 \in (2, +\infty)$ 时, $2 < a_n < a_1 (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$
 D. 若 $a_1 = 1$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = a_1 + \dots + a_n$, 则 $S_n \leq 2n - 1$.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知非零向量 a, b 夹角为 30° , $|a-b|=2, (a-\frac{1}{2}b) \cdot b=0$, 则 $|a|$ 等于_____.

14. 为了探究两类统计量 x, y 的关系, 经采集样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 发现其散点图呈线性关系 $y_i = kx_i + 2$, 其中 $k > 0, x_i > 0, y_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 若 x, y 的方差分别为 0.5, 2, 且 y 的平均数为 10, 则 x 的平均数为_____.

15. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, 其中 $\omega > 0$, 且 $|f(x)| \leq f(\frac{\pi}{6})$ 恒成立, $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ 上单调, 则 ω 的取值范围是_____.

16. 已知 P 为 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}, 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$ 成等差数列, 则 $\cos \angle BPC$ 的最小值等于_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 1, (n+1)(n+2)a_n - 4n(n+2)a_{n+1} + 4n(n+1)a_{n+2} = 0, n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 证明: 数列 $\{\frac{2^n a_n}{n}\}$ 为等差数列, 并写出数列 $\{a_n\}$ 的通项;

(2) 求数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (12分) 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a^2 = b^2 + 3c^2$.

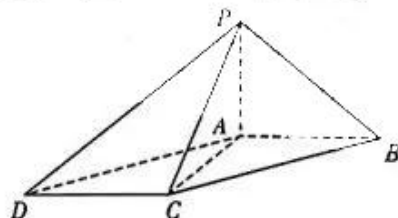
(1) 证明: $\tan A = -2\tan B$;

(2) 若 $c=3$, 求角 C 取得最大值时, BC 边上的高 h .

19. (12分) 已知四棱锥 $P-ABCD$, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle PAB = 90^\circ$, $\angle PBA = 45^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle PBC = 60^\circ$.

(1) 证明: $PA \perp$ 平面 $ABCD$;

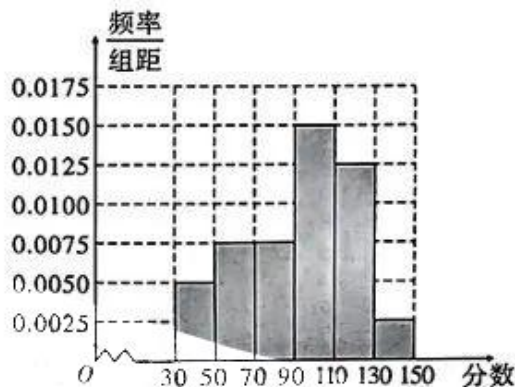
(2) 若 $PB = PC$, 求二面角 $D-PC-B$ 的正弦值.



20. (12分) 2023年10月26日, 神舟十七号顺利发射, 我国史上最年轻航天员乘组创造了中国航天历史. 这一伟大壮举激发了行知中学学生学习航天知识的热情, 学校开展了“航天知识竞赛”活动. 活动分为三个阶段, 第一阶段为“初赛”, 通过网络答题活动, 遴选优秀学生60名; 第二阶段为“复赛”, 由初赛遴选的60名学生进行“航天模型设计”竞赛; 第三阶段为“决赛”, 由“复赛”成绩前2名的学生进行“空间知识竞赛”决赛, 获胜者授予“航天小达人”称号. 现统计参加“航天模型设计”竞赛的60名学生的成绩得到频率分布直方图如下:

- (1) 根据频率分布直方图, 估计参加“航天模型设计”竞赛的60名学生的成绩平均分;
 (2) 已知甲、乙两名同学参加决赛, 决赛采取现场答题的方式进行. 比赛规则如下: 若选手答对题, 则继续下一次答题; 若答错题, 则由另一位选手进行下一次答题. 已知甲、乙两位选手答对任一试题的概率均为 $\frac{2}{3}$, 每次答题相互独立, 且甲选手答第1题.

- ① 求前3次答题, 甲答2次题的概率;
 ② 设第 n 次为甲答题的概率为 P_n , 求 P_n .



21. (12分) 已知函数 $f(x) = (1-x)e^x - a, a \in \mathbf{R}, y = f(x)$ 的图象的一条切线的方程为 $y = -ex + e - 1, e \approx 2.71828 \dots$.

(1) 求 a ;

(2) 当 $n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$ 时, 证明: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \ln n$.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = e^x - ax + 1, a \in \mathbf{R}, f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 .

(1) 若 $a \in \mathbf{Z}$, 求 a 的最小值;

(2) 证明: $x_1 + x_2 > 2 + \frac{2}{a}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

