秘密★启用前

2021届“3+3+3”高考备考诊断性联考卷（一）
文科数学

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.
2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分150分，考试用时120分钟.

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $A=\{x|x(x-2)\leqslant 0\}$，$B=\{x|x>1\}$，则 $A\cap B=$

A. $(0,\ 1)$　　B. $(1,\ 2)$

C. $[0,\ 1)$　　D. $(1,\ 2]$

2. 设复数 z 满足 $z(2+i)=1$，则 z 的虚部是

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}i$

C. $-\frac{1}{5}$　　D. $-\frac{1}{5}i$

3. 设一组样本数据 x_1，x_2，…，x_n 的均值为1.1，若 ax_1+1，ax_2+1，…，ax_n+1 的均值为3.2，则 a 的值为

A. 2　　B. 1

C. 2.2　　D. 2.1

4. 某项研究成果发现，试管内某种病毒细胞的总数 y 和天数 t 的函数关系为 $y=3^{t-1}$，且该种病毒细胞的个数超过 10^8 时会发生变异，则该种病毒细胞实验最多进行的天数为（　　）天（$\lg 3\approx 0.477$）.

A. 15　　B. 16

C. 17　　D. 18

5. $\sqrt{3}\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=\sqrt{3}$，$\alpha\in(0,\ \pi)$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ 的值为

A. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 或 $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

6. 在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，$M(1,\ 1)$，$N(-1,\ 2)$，点 P 满足 $\overrightarrow{OM}=t_1\overrightarrow{OP}+t_2(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON})(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})$，其中 $2t_1-t_2=0$，则点 P 的轨迹是

A. 椭圆　　B. 直线

C. 双曲线　　D. 抛物线

7. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 交于 A，B 两点，且 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，O 为坐标原点，则 $p=$

A. 3
B. $2\sqrt{3}$
C. $\frac{3\sqrt{30}}{20}$
D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

8. 设直线 l_1：$3x-y-1=0$ 与直线 l_2：$x+2y-5=0$ 的交点为 A，则 A 到直线 l：$x+by+2+b=0$ 的距离的最大值为

A. 4
B. $\sqrt{10}$
C. $3\sqrt{2}$
D. $\sqrt{11}$

9. 某几何体的三视图如图 1 所示，则这个几何体的体积为

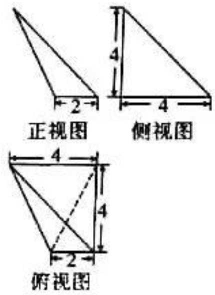

图 1

A. $\frac{32}{3}$
B. $\frac{16}{3}$
C. 16
D. 48

10. 已知 $a=\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}$，$b=\log_3 2$，$c=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}$，则 a，b，c 的大小关系为

A. $a>b>c$
B. $b>a>c$
C. $c>b>a$
D. $c>a>b$

11. 在△ABC 中，已知 $\cos A=\frac{1}{5}$，$AC=5$，△ABC 的面积为 $2\sqrt{6}$，点 M 为 BC 边上的中点，则 $AM=$

A. $\sqrt{21}$
B. $\frac{\sqrt{21}}{2}$
C. $\sqrt{33}$
D. $\frac{\sqrt{33}}{2}$

12. 已知以下四个结论：

①函数 $y=\tan x$ 图象的一个对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$；

②函数 $y=\left|\sin x+\frac{1}{2}\right|$ 的最小正周期为 π；

③函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象与函数 $f(x)=\cos\left(\frac{7}{6}\pi-2x\right)$ 的图象重合；

④若 $A+B=\frac{\pi}{4}$，则 $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$.

其中，正确的结论是

A. ①③
B. ①④
C. ②③
D. ②④

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 已知实数 x，y 满足 $\begin{cases}2x-y\geqslant 8,\\ x+2y\leqslant 8,\\ y\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最小值是________.

14. 双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5}=1(a>0)$ 的焦点到渐近线的距离为________.

15. 曲线 $f(x)=[xf'(e)+3x^2]\ln x$(其中 e 为自然对数的底数)在点 $\left(\frac{1}{e},f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$ 处的切线方程为________.

16. 有一块正三棱锥形状的玉石，底棱长为2，侧棱长为 $\sqrt{3}$，现要把玉石加工成一个玉球，则玉球的最大半径是________.

三、解答题（共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分12分）

设各项均为正的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_3=5$，$a_4-a_2=15$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 S_n 为数列 $\{\log_4 a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_m+S_{m+1}=S_{m+2}$，求 m.

18.（本小题满分12分）

数字人民币，是中国人民银行尚未发行的法定数字货币，即"数字货币电子支付". 央行数字货币不计付利息，可用于小额、零售、高频的业务场景，相比于纸币没有任何差别. 数字人民币试点地区是深圳、苏州、雄安新区、成都及未来的冬奥场景. 为了解居民对数字人民币的了解程度，某社区居委会随机抽取1200名社区居民参与问卷测试，并将问卷得分绘制频率分布表如下：

得分	[30，40)	[40，50)	[50，60)	[60，70)	[70，80)	[80，90)	[90，100]
男性人数	30	110	110	150	130	80	40
女性人数	20	60	70	180	140	50	30

（1）从该社区随机抽取一名居民参与问卷测试，试估计其得分不低于60分的概率；

（2）将居民对数字人民币的了解程度分为"比较了解"（得分不低于60分）和"不太了解"（得分低于60分）两类，完成2×2列联表，并判断是否有99%的把握认为"数字人民币的了解程度"与"性别"有关？

	不太了解	比较了解	总计
男性			
女性			
总计			

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}(n=a+b+c+d)$.

临界值表：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19.（本小题满分 12 分）

如图 2，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F、G、P、Q 分别是 CD、CC_1、A_1B_1、B_1C_1、AB 的中点.

（1）证明：$PF\subset$平面 GEF；

（2）求 Q 到平面 EFG 的距离.

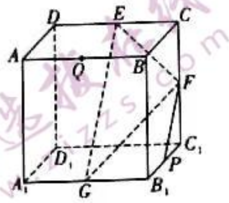

图 2

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，过椭圆右焦点的所有直线中被椭圆所截得的最短弦长为 1.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）已知直线 l 的斜率不为 0，若 l 过点 $P(1,0)$交椭圆于 A、B 两点，在椭圆长轴所在直线上是否存在一定点 Q，使$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$为定值，若存在，求出定点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x-\ln x$.

（1）求函数 $f(x)$的最小值；

（2）已知实数 $a>0$，e 为自然对数的底数，若 $x-f(x)\leqslant ae^x+\ln a$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，求实数 a 的取值范围.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致，在答题卡选答区域指定位置答题. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta,\\ y=2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta,\end{cases}$（$\theta$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，取相同长度单位建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=4$.

（1）求曲线 C 的直角坐标方程；

（2）直线 l 与 x 轴的交点为 M，经过点 M 的动直线 l_2 与曲线 C 交于 P，Q 两点，证明：$|MP||MQ|$为定值.

23.（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

已知函数 $f(x)=|x+m|+|3-x|$，$x\in\mathbf{R}$.

（1）证明：当 $m=5$ 时，$\ln f(x)>2$；

（2）若函数 $g(x)=|2x-2m^2-7|+|x+m|$，$x\in\mathbf{R}$，且关于 x 的不等式 $g(x)\geqslant f(x)+\frac{3}{2}m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

2021届“3+3+3”高考备考诊断性联考卷（一）
文科数学参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	A	C	A	B	D	C	B	C	D	B

【解析】

1．∵集合 $A=\{x\,|\,x(x-2)\leqslant 0\}=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\,|\,x>1\}$，∴ $A\cap B=\{x\,|\,1<x\leqslant 2\}$，故选D．

2．$z=\dfrac{1}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{2-\mathrm{i}}{2^2-\mathrm{i}^2}=\dfrac{2-\mathrm{i}}{5}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$，虚部为 $-\dfrac{1}{5}$，故选C．

3．依题意可得 $a\times 1.1+1=3.2$，解得 $a=2$，故选A．

4．取 $y=3^{t-1}=10^8$，故 $t-1=\log_3 10^8=8\log_3 10$，即 $t=8\log_3 10+1=8\left(\dfrac{1}{\lg 3}\right)+1\approx 17.77$，故该种病毒细胞实验最多进行的天数为17，故选C．

5．∵ $\sqrt{3}\cdot\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}+\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha=\sqrt{3}$，∴ $\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

∵ $\alpha\in(0,\ \pi)$，∴ $2\alpha-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $2\alpha-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$，∴ $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{\pi}{2}$，当 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 时，∴ $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$；当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时，∴ $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故选A．

6．设 $P(x,\ y)$，$\overrightarrow{OM}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MN}=(-2,\ 1)$，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=1$，∵ $\overrightarrow{OM}=t_1\overrightarrow{OP}+t_2(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON})(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})$，即 $(1,\ 1)=(t_1x,\ t_1y)+t_2(-2,\ 1)$，∴ $\begin{cases}t_1x-2t_2=1,\\ t_1y+t_2=1,\end{cases}$ ∵ $2t_1-t_2=0$，∴ $t_2=2t_1$，∴ $\begin{cases}t_1x-4t_1=1,\\ t_1y+2t_1=1,\end{cases}$ ∴ $t_1x-4t_1=t_1y+2t_1$，∴ $x-y-6=0$，故选B．

7．因为两个曲线都是关于 x 轴对称，故 A，B 关于 x 轴对称，故 $\angle AOx=\dfrac{\pi}{6}$

$A\left(m,\ \frac{\sqrt{3}m}{3}\right)$，代入 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$，得 $m=\sqrt{3}$，故 $A(\sqrt{3},\ 1)$，代入 $y^2=2px$，有 $1=2\sqrt{3}p$，

解得 $p=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，故选 D.

8．由 $\begin{cases}3x-y-1=0,\\x+2y-5=0,\end{cases}$ 可以得到 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ 故 $A(1,\ 2)$，直线 l 的方程可整理为 $x+2+b(y+1)=0$，

故直线 l 过定点 $(-2,\ -1)$，故 $d_{\max}=\sqrt{(1+2)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{2}$，故选 C.

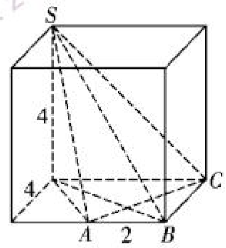

图 1

9．如图 1，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times4=4$，$V_{S-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{3}\times4\times4=\frac{16}{3}$，故选 B.

10．$c=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}=\log_3 4>1$，$a=\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}=\log_2\frac{4}{3}<\frac{1}{2}$，$b=\log_3 2>\frac{1}{2}$，综上可得，故选 C.

11．因为 $\cos A=\frac{1}{5}$，所以 $\sin A=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，又 $AC=5$，$\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{6}$，所以有 $2\sqrt{6}=\frac{1}{2}\times5\times AB\times\frac{2\sqrt{6}}{5}$，解得 $AB=2$，由余弦定理可得 $BC^2=2^2+5^2-2\times2\times5\times\frac{1}{5}=25$，所以 $BC=5$，由 $AC=BC$，所以 $\cos B=\cos A=\frac{1}{5}$，所以 $AM^2=2^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\times2\times\frac{5}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{33}{4}$，即 $AM=\frac{\sqrt{33}}{2}$，故选 D.

12．由正切函数图象特征可知①正确；$y=\left|\sin x+\frac{1}{2}\right|$ 的最小正周期为 2π，故②不正确；$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的表达式可以改写为 $f(x)=-\cos\left(\frac{7}{6}\pi-2x\right)$，故③不正确；由 $A+B=\frac{\pi}{4}$，则 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1$，$(1+\tan A)(1+\tan B)=1+\tan A+\tan B+\tan A\cdot\tan B=2$，④正确，故选 B.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	4	$\sqrt{5}$	$3x+ey-9e=0$	$3\sqrt{10}-\sqrt{15}$

【解析】

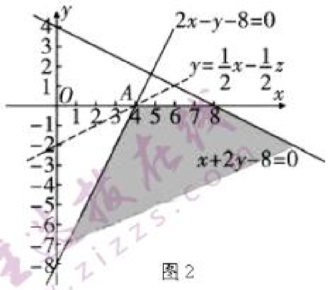

图 2

13．画出不等式组表示的可行域，如图 2 中阴影部分所示．由 $z=x-2y$，可得 $y=\frac{1}{2}x-\frac{z}{2}$．平移直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{z}{2}$，结合图形可得，当直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{z}{2}$ 经过可行域内的点 A 时，直线在 y 轴上的截距最大，此时 z 取得最小值．由题意得 A 点坐标为 $(4,\ 0)$，$\therefore z_{\min}=4-0=4$，即 $z=x-2y$ 的最小值是 4.

14．用点到直线的距离公式可得双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 中焦点到渐近线的距离为 b.

15．因为 $f'(x)=[f'(\mathrm{e})+6x]\ln x+f'(\mathrm{e})+3x$，所以 $f'(\mathrm{e})=f'(\mathrm{e})+6\mathrm{e}+f'(\mathrm{e})+3\mathrm{e}$，即 $f'(\mathrm{e})=-9\mathrm{e}$，

则 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=9-\frac{3}{\mathrm{e}^2}$，且 $f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{3}{\mathrm{e}}$，所以所求切线方程为 $3x+\mathrm{e}y-9\mathrm{e}=0$．

16．设该正三棱锥为 $P-ABC$，其中 $\triangle ABC$ 是正三角形，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2^2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，设 D 为 $\triangle ABC$ 的重心，则 $AD=\frac{2}{3}\times 2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$PD=\sqrt{3-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{3}$，$S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PAC}=S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{(\sqrt{3})^2-1}=\sqrt{2}$，设内切球半径为 r，则 $\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PD=\frac{1}{3}(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB})r$，即 $\frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{1}{3}(\sqrt{3}+3\sqrt{2})r$，解得 $r=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}(3\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{3\sqrt{10}-\sqrt{15}}{15}$．

三、**解答题**（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，根据题意，

由 $\begin{cases}a_1q+a_1q^2=5,\\a_1q^3-a_1q=15,\end{cases}$ ……………………………………………………（3 分）

解得 $\begin{cases}a_1=\frac{1}{4},\\q=4,\end{cases}$ ……………………………………………………（5 分）

所以 $a_n=4^{n-2}$． ……………………………………………………

（2）令 $b_n=\log_4 a_n=\log_4 4^{n-2}=n-2$，

所以 $S_n=\dfrac{n(-1+n-2)}{2}=\dfrac{n(n-3)}{2}$，

……………………………………………………（8 分）

根据 $S_m+S_{m+1}=S_{m+2}$，可得 $\dfrac{m(m-3)}{2}+\dfrac{(m+1)(m-2)}{2}=\dfrac{(m+2)(m-1)}{2}$，

整理得 $m^2-5m=0$，因为 $m>0$，

所以 $m=5$．……………………………………………（12 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）由调查数据，问卷得分不低于 60 分的频率为

$\dfrac{150+180+130+140+130+70}{1200}=\dfrac{2}{3}$，

……………………………………………………（3 分）

故估计从该社区随机抽取一名居民其得分不低于 60 分的概率为 $\dfrac{2}{3}$．

……………………………………………………（4 分）

（2）由题意得列联表如下：

	不太了解	比较了解	总计
男性	250	400	650
女性	150	400	550
总计	400	800	1200

……………………………………………………（6 分）

K^2 的观测值 $k=\dfrac{1200\times(250\times400-150\times400)^2}{400\times800\times650\times550}\approx16.783$，

……………………………………………………（9 分）

因为 $16.783>6.635$，

……………………………………………………（10 分）

所以有 99%的把握认为居民对数字人民币的了解程度与性别有关．

……………………………………………………

19.（本小题满分 12 分）

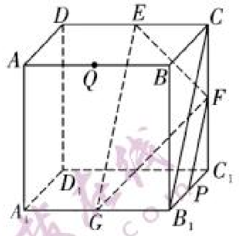
图 3

（1）证明：如图 3，连接 B_1C，

在 $\triangle C_1CB_1$ 中，P，F 分别是 B_1C_1，C_1C 的中点，

所以 PF 是 $\triangle C_1CB_1$ 的中位线，

则 $PF // B_1C$．

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$DC // A_1B_1$，G，E 分别是 A_1B_1，DC 的中点，

则 $EC // GB_1$，$EC = GB_1$，

所以四边形 GB_1CE 是平行四边形，则 $B_1C // GE$，

所以 $PF // GE$，

所以 $PF \subset$ 平面 GEF． ……………………………………（6 分）

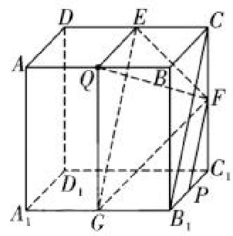
图 4

（2）解：如图 4，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，连接 QE，QG，QF，

$\triangle QGE$ 是直角三角形，$QE = QG = 2$，$GE = \sqrt{QE^2 + QG^2} = 2\sqrt{2}$，

而且 $CC_1 // BB_1 // QG$，$CC_1 \not\subset$ 平面 QGE，

所以 $CC_1 //$ 平面 QGE，所以点 F 到平面 QGE 的距离等于点 C 到平面 QGE 的距离，

易知 $CE \perp$ 平面 QGE，所以点 F 到平面 QGE 的距离为 $CE = 1$，

而 $EF = \sqrt{EC^2 + CF^2} = \sqrt{2}$，

$GF = \sqrt{GC_1^2 + C_1F^2} = \sqrt{GB_1^2 + B_1C_1^2 + C_1F^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$，

……………………………………………………………（9 分）

在 $\triangle FGE$ 中，$EF^2 + GF^2 = GE^2$，所以 $\triangle FGE$ 是直角三角形，

设求 Q 到平面 EFG 的距离为 d，在三棱锥 $Q-GEF$ 中，$V_{Q-GEF} = V_{F-QGE}$，

即 $\frac{1}{3}S_{\triangle QGE} \cdot CE = \frac{1}{3}S_{\triangle GEF} \cdot d$，

即 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times QE \times QG \times CE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times EF \times GF \cdot d$，

即 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{6} \times d$，解得 $d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以 Q 到平面 EFG 的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$． ……………………………

20．（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意可得 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{2b^2}{a}=1$，

$\therefore a=2$，$b=1$，

C：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$． ……………………………………………………（4 分）

（2）设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$Q(x_0,\ 0)$，

设直线 l：$x=my+1$，将其代入 $x^2+4y^2-4=0$，

得 $(4+m^2)y^2+2my-3=0$，

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{-2m}{4+m^2}$，$y_1y_2=\dfrac{-3}{4+m^2}$，

$\therefore x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=\dfrac{8}{4+m^2}$，

$x_1x_2=m^2y_1y_2+m(y_1+y_2)+1=\dfrac{4-4m^2}{4+m^2}$，

……………………………………………………（8 分）

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=t$，则 $t=(x_1-x_0,\ y_1)\cdot(x_2-x_0,\ y_2)=x_1x_2+x_0^2-(x_1+x_2)x_0+y_1y_2$

$=\dfrac{4-4m^2}{4+m^2}-\dfrac{8}{4+m^2}x_0-\dfrac{3}{4+m^2}+x_0^2$，

$=\dfrac{17-8x_0}{4+m^2}+x_0^2-4$，

这是一个与 m 无关的常数，

$\therefore x_0=\dfrac{17}{8}$，$t$ 为常数，此时存在定点 $Q\left(\dfrac{17}{8},\ 0\right)$，使 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 为定值．

……………………………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

解：（1）因为 $f(x)=x-\ln x$，故 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，

……………………………………………………（1 分）

令 $f'(x)>0$，得 $x>1$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$，

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增， ……………………（3 分）

故函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=1$． ……………………………………………（4 分）

（2）由题意知 $\ln x \leqslant ae^x+\ln a$，

两边同时加上 x，得 $ae^x+x+\ln a \geqslant x+\ln x$，

即 $ae^x+\ln(ae^x) \geqslant x+\ln x$， ……………………………………………（7 分）

设 $h(x)=x+\ln x(x>0)$，则 $h'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$，故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$ae^x+\ln(ae^x) \geqslant x+\ln x$ 恒成立，即 $h(ae^x) \geqslant h(x)$ 恒成立， ……………………（9 分）

即 $ae^x \geqslant x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $a \geqslant \dfrac{x}{e^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

设 $\varphi(x)=\dfrac{x}{e^x}(x>0)$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$，

则当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)>0$，故 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增；

当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)<0$，故 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

故 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(1)=\dfrac{1}{e}$， ……………………………………………………（11 分）

故 $a \geqslant \dfrac{1}{e}$，故所求实数 a 的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$．

……………………………………………………………（12 分）

22．（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

（1）解：由 $x^2+y^2=(2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta)^2+(2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta)^2=16$，

得曲线 C 为 $x^2+y^2=16$． ………………………………………………………（5 分）

（2）证明：直线 l 的极坐标方程展开为 $\rho\cos\alpha+\sqrt{3}\rho\sin\alpha=8$，

故 l 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y=8$．

显然 M 的坐标为 $(8,0)$，不妨设过点 M 的直线方程为 $\begin{cases}x=8+t\cos\beta,\\ y=t\sin\beta,\end{cases}$ （t 为参数），

代入 C 得 $t^2+16\cos\beta t+48=0$，设 P，Q 对应的参数为 t_1，t_2，

所以 $|t_1t_2|=48$ 为定值． ……………………………………………

23．（本小题满分 10 分）【选修 4－5：不等式选讲】

（1）证明：当 $m=5$ 时，$f(x)=|x+5|+|3-x|\geqslant|(x+5)+(3-x)|=8>e^2$，

则 $\ln f(x)\geqslant\ln 8>\ln e^2=2$ 成立．……………………………………………（5 分）

（2）解：关于 x 的不等式 $g(x)\geqslant f(x)+\dfrac{3}{2}m$ 可化为 $|2x-2m^2-7|-|x-3|\geqslant\dfrac{3}{2}m$，

令 $h(x)=|2x-2m^2-7|-|x-3|=\begin{cases}-x+2m^2+4, & x\leqslant 3,\\ -3x+2m^2+10, & 3<x<m^2+\dfrac{7}{2},\\ x-2m^2-4, & x\geqslant m^2+\dfrac{7}{2},\end{cases}$

则 $h(x)_{\min}=h\left(m^2+\dfrac{7}{2}\right)=-m^2-\dfrac{1}{2}$，即 $-m^2-\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{3}{2}m$，

则有 $m^2+\dfrac{3}{2}m+\dfrac{1}{2}\leqslant 0$，

解得 $-1\leqslant m\leqslant-\dfrac{1}{2}$．……………………………………

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》