

数学理科答案

一. 选择题: CCABC BDABB AD

二. 填空题: 13. $\frac{1}{8}$ 14. $(-\infty, 2\sqrt{2}]$ 15. $\frac{36}{\ln 3}$ 16. 1349

17. (1) $a = -1$ 时, $f(x) = x^3 - x^2 + 3x - 9$, $f'(x) = 3x^2 - 2x + 3$,

$f'(2) = 11$, $f(2) = 1$, 故切线方程是: $y - 1 = 11(x - 2)$, 即 $11x - y - 21 = 0$;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减,

则 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3 \leq 0$ 在 $[1, 2]$ 恒成立, 即 $a \leq -\frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ 在 $[1, 2]$ 恒成立,

令 $h(x) = -\frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$, $x \in [1, 2]$, $h'(x) = -\frac{3(x-1)(x+1)}{2x^2} < 0$ 在 $[1, 2]$ 恒成立,

$\therefore h(x)$ 在 $[1, 2]$ 递减, $h(x)_{\min} = h(2) = -\frac{15}{4}$, $\therefore a \leq -\frac{15}{4}$.

18. (1) $\because 2^{b_n} = a_n + 1, \therefore b_n = \log_2(a_n + 1), b_1 = \log_2(3 + 1) = 2$,

$\therefore \log_2(a_{n+1} + 1) = 2\log_2(a_n + 1)$,

$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\log_2(a_{n+1} + 1)}{\log_2(a_n + 1)} = 2$,

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列.

(2) 由 (1) 可得, $b_n = 2^n$, 所以 $c_n = \frac{n}{2^n} + 1$,

设 $d_n = \frac{n}{2^n}$, 设其前 n 项和为 S_n ,

则 $S_n = \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$, ①

$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}$, ②

减②得

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n-1}} = 1 - \frac{n+2}{2^{n+1}},$$

所以 $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$,

所以 $T_n = 2 - \frac{n+2}{2^n} + n^2$.

19. 【详解】(1) 因为 $\frac{a \cos C + c \cos A}{\cos C} + \sqrt{2}b = 0$, 故 $a \cos C + c \cos A + \sqrt{2}b \cos C = 0$,

则 $\sin A \cos C + \sin C \cos A + \sqrt{2} \sin B \cos C = 0$,

故 $\sin(A+C) + \sqrt{2} \sin B \cos C = 0$, 因为 $A+C = \pi - B$, 则 $\sin(A+C) = \sin B \neq 0$,

则 $1 + \sqrt{2} \cos C = 0$, 故 $\cos C = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $C = \frac{3\pi}{4}$;

(2) $ac \cos B - bc \cos A = b^2$, 则 $ac \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b^2$,

化简得 $a^2 = 2b^2$, 则 $b = 2\sqrt{2}$, 故 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$.

20. 【详解】(1) 在 $\text{Rt}\triangle AEG$ 中, 因为 $\sin \angle AEG = \frac{AG}{EG}$, 可得 $EG = \frac{AG}{\sin \angle AEG} = \frac{2}{\sin \theta}$,

在 $\triangle AFG$ 中, 可知 $\angle AFG = \frac{\pi}{3} - \theta$,

由正弦定理 $\frac{GF}{\sin \angle GAF} = \frac{AG}{\sin \angle AFG}$, 可得 $GF = \frac{AG \cdot \sin \angle GAF}{\sin \angle AFG} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}$,

所以 $y = 10EG + 20GF = \frac{20}{\sin \theta} + \frac{20}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}$.

(2) 由 (1) 可知: $y = \frac{20}{\sin \theta} + \frac{20}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} = \frac{20}{\sin \theta} + \frac{40}{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta} = \frac{20 \sin \theta + 20\sqrt{3} \cos \theta}{\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta}$
 $= \frac{80 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}{-2 \cos\left(2\theta + \frac{2\pi}{3}\right) - 1} = \frac{80 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}{4 \sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - 3}$, 因为 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$, 则 $\theta + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$,

令 $t = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$, 则 $y = \frac{80t}{4t^2 - 3} = \frac{80}{4t - \frac{3}{t}}$, 且 $y = 4t, y = -\frac{3}{t}$ 在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ 上单调递增,

可知 $y = 4t - \frac{3}{t}$ 在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ 上单调递增, 所以 $y = \frac{80t}{4t^2 - 3} = \frac{80}{4t - \frac{3}{t}}$ 在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ 上单调递减,

当 $t = 1$, 即 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, 修建道路的总费用 y 取到最小值 80 万元.

21. 【详解】(1) 因为 $f(x) = e^{ax} - ax (a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ 定义域为 \mathbb{R} , 则 $f(x) = ae^{ax} - a = a(e^{ax} - 1)$,

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x < 0$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 0$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x < 0$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 0$;

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

综上, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 因为 $a(\ln b - \ln a + a) \geq be^{a-1}$, 所以 $\ln b - \ln a + a \geq \frac{b}{a}e^{a-1}$,

所以 $\ln \frac{b}{a} + \ln e^{a-1} + 1 \geq \frac{b}{a}e^{a-1}$, 即 $\ln(\frac{b}{a}e^{a-1}) - \frac{b}{a}e^{a-1} + 1 \geq 0$

令 $t = \frac{b}{a}e^{a-1}$, 则有 $\ln t - t + 1 \geq 0 (t > 0)$,

设 $f(t) = \ln t - t + 1$, 则 $f'(t) = \frac{1}{t} - 1$, 由 $f'(t) = 0$ 得 $t = 1$

当 $0 < t < 1$ 时, $f'(t) > 0$, $f(t)$ 单调递增, 当 $t > 1$ 时, $f'(t) < 0$, $f(t)$ 单调递减,

所以 $f(t)_{\max} = f(1) = 0$, 即 $\ln t - t + 1 \leq 0$, 又因为 $\ln t - t + 1 \geq 0$,

所以 $\ln t - t + 1 = 0$, 当且仅当 $t = 1$ 时等号成立

所以 $t = \frac{b}{a}e^{a-1} = 1$, 从而 $\frac{1}{b} = \frac{1}{a}e^{a-1}$, 所以原式 $= \frac{1}{ab} = \frac{e^{a-1}}{a^2} (a > 0)$

设 $g(x) = \frac{e^{x-1}}{x^2} (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{(x-2)e^{x-1}}{x^3}$, 由 $g'(x) = 0$ 得 $x = 2$

当 $0 < x < 2$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 当 $x > 2$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

所以 $g(x)_{\min} = g(2) = \frac{e^{2-1}}{2^2} = \frac{e}{4}$, 所以最小值为 $\frac{e}{4}$.

22. 【详解】(1) 因为曲线 $C: \rho \sin^2 \theta = 2a \cos \theta (a > 0)$

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2 = 2ax (a > 0)$

直线的直角坐标方程为: $x - y - 2 = 0$

所以极坐标方程为: $\rho \cos \theta - \rho \sin \theta - 2 = 0$ 即 $\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

(2) 将直线 l 的参数方程 $\begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = -4 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ 代入曲线 C 的直角坐标方程得:

$$\frac{1}{2}t^2 - (4\sqrt{2} + \sqrt{2}a)t + 16 + 4a = 0,$$

设交点 M 、 N 对应的参数分别为 t_1 、 t_2 ,

$$\text{则 } t_1 + t_2 = 2(4\sqrt{2} + \sqrt{2}a), \quad t_1 t_2 = 2(16 + 4a),$$

因为 $|PM|$ 、 $|MN|$ 、 $|PN|$ 成等比数列, 所以 $|t_1 - t_2|^2 = |t_1 t_2|$,

$$\text{即 } |t_1 + t_2|^2 = 5|t_1 t_2|, \quad 4(4\sqrt{2} + \sqrt{2}a)^2 = 10(16 + 4a),$$

解得 $a=1$ 或 $a=-4$ (舍取), 故满足条件的 $a=1$,

23. 【详解】(1) 依题意, 得 $|4x+2| - |4x+4| + \frac{1}{2}x < 1$,

当 $x \leq -1$ 时, $-4x-2+4x+4+\frac{1}{2}x < 1$, 可得 $x < -2$;

当 $-1 < x < -\frac{1}{2}$ 时, $-4x-2-4x-4+\frac{1}{2}x < 1$, 可得 $-\frac{14}{15} < x < -\frac{1}{2}$;

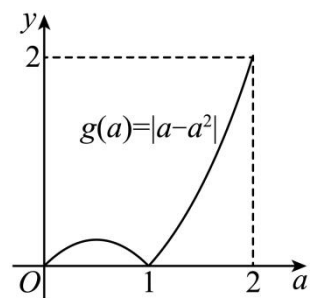
当 $x \geq -\frac{1}{2}$ 时, $4x+2-4x-4+\frac{1}{2}x < 1$, 可得 $-\frac{1}{2} \leq x < 6$;

综上, 不等式 $f(x) + \frac{1}{2}x < 1$ 的解集为 $\{x | x < -2 \text{ 或 } -\frac{14}{15} < x < 6\}$.

(2) 依题意, $f\left(\frac{1}{2}x\right) > m \Leftrightarrow |2x+a| - |2x+a^2| > m$,

又 $|2x+a| - |2x+a^2| \leq |2x+a-2x-a^2| = |a-a^2|$, 故 $|a-a^2| > m$,

令 $g(a) = |a-a^2|$, $a \in [0, 2]$,



结合 $g(a)$ 的图象知, $[g(a)]_{\max} = g(2) = 2$, 故 $m < 2$,

$\therefore m$ 的取值范围为 $(-\infty, 2)$.