2024届高三第一学期期中质量监测

数学参考答案及评分建议

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	A	A	C	B	A	C

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

题号	9	10	11	12
答案	BC	BD	ACD	BCD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

14. $a^x(0<a<1)$（答案不唯一）

15. 5

16. 3π，$\dfrac{2}{3}$

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10分）

【解】（1）$f(x)=\cos 2x\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 4x=\dfrac{1}{2}\sin 4x+\dfrac{1}{2}\cos 4x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{4}\right)$， …… 2分

当 $4x+\dfrac{\pi}{4}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{1}{2}k\pi+\dfrac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$ 时，$f(x)_{\max}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

此时，x 的取值集合为 $\left\{x\middle|x=\dfrac{1}{2}k\pi+\dfrac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right\}$. …… 5分

（2）$g(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(4\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$.

设 $u=4\omega x+\dfrac{\pi}{4}$，因为 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $u\in\left(\dfrac{\pi}{4},2\omega\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$， …… 7分

因为 $g(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上有且仅有1个极值点，

所以 $\dfrac{\pi}{2}<2\omega\pi+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$， …… 9分

解得 $\dfrac{1}{8}<\omega\leqslant\dfrac{5}{8}$. ……10分

18.（12 分）

【解】（1）因为 $\tan A+\tan B=-\dfrac{\sqrt{3}c}{a\cos B}$，

由正弦定理得 $\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}=-\dfrac{\sqrt{3}\sin C}{\sin A\cos B}$， …… 2 分

所以 $\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B}=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}=\dfrac{\sin C}{\cos A\cos B}=-\dfrac{\sqrt{3}\sin C}{\sin A\cos B}$， …… 4 分

因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C\neq 0$， $\cos B\neq 0$ 可知 $\tan A=-\sqrt{3}$，

又因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$. …… 6 分

（2）因为 D 是边 BC 的中点，所以 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$，

故 $\dfrac{1}{2}b\cdot AD\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}c\cdot AD$，故 $b=2c$. …… 8 分

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\dfrac{2\pi}{3}=b^2+c^2+bc=7c^2$，故 $a=\sqrt{7}c$，

因为 $a=7$，所以 $c=\sqrt{7}$， $b=2\sqrt{7}$. ……10 分

又因为 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$，

平方得 $\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\dfrac{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{4}=\dfrac{c^2+b^2+2bc\cos120^\circ}{4}$，

所以 $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\dfrac{\sqrt{7+28-14}}{2}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$，

故 AD 的长为 $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$. ……12 分

19.（12 分）

【解】（1）法一：因为 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{n(n+1)}$，

所以 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$， …… 2 分

所以 $\dfrac{a_{n+1}+1}{n+1}=\dfrac{a_n+1}{n}$，

所以 $\left\{\dfrac{a_n+1}{n}\right\}$ 是常数列， …… 4 分

所以 $\dfrac{a_n+1}{n}=\dfrac{a_1+1}{1}=2$，

所以 $a_n=2n-1$. …… 6 分

法二：因为 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{n(n+1)}$

所以 $na_{n+1}-(n+1)a_n=1$，①

所以 $(n+1)a_{n+2}-(n+2)a_{n+1}=1$，②

②-①，得 $(n+1)a_{n+2}-(2n+2)a_{n+1}+(n+1)a_n=0$，　　…… 2 分

所以 $a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}$，

所以 $\{a_n\}$ 是等差数列，　　…… 4 分

由 $a_1=1$，$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{n(n+1)}$ 得 $a_2=3$，

所以等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=a_2-a_1=2$，

所以 $a_n=2n-1$.　　…… 6 分

（2）$b_n=(-1)^{n-1}\dfrac{4n}{a_na_{n+1}}=(-1)^{n-1}\dfrac{4n}{(2n-1)(2n+1)}=(-1)^{n-1}\left(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n+1}\right)$.　　…… 8 分

当 n 为偶数时，$S_n=\left(1+\dfrac{1}{3}\right)-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-3}+\dfrac{1}{2n-1}\right)-\left(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$$=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}.$$　　……10 分

当 n 为奇数时，$S_n=\left(1+\dfrac{1}{3}\right)-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\right)+\cdots-\left(\dfrac{1}{2n-3}+\dfrac{1}{2n-1}\right)+\left(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$$=1+\frac{1}{2n+1}=\frac{2n+2}{2n+1}.$$

所以 $S_n=\begin{cases}\dfrac{2n+2}{2n+1}, & n\text{为奇数}, \\ \dfrac{2n}{2n+1}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$　（或 $S_n=\dfrac{2n+1+(-1)^{n-1}}{2n+1}$）　　……12 分

20.（12 分）

【解】（1）导函数 $f'(x)=a-\dfrac{1}{x}$，$f'(1)=a-1$，又 $f(1)=0$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=(a-1)(x-1)$，

即 $(a-1)x-y-a+1=0$.　　…… 3 分

（2）当 $a=1$ 时，$f(x)=x-1-\ln x$，$x>0$.

$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$,

令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$. ……5 分

列表如下：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取最小值 $f(1)=0$，

所以 $f(x)\geqslant 0$. …… 8 分

（3）由（2）可知，$\ln x\leqslant x-1$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，

所以 $\ln\left(1+\frac{2^{n-1}}{3^n}\right)<\frac{2^{n-1}}{3^n}$，

$$\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{3^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2^2}{3^3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{2^{n-1}}{3^n}\right)<\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^n}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)}{1-\frac{2}{3}}=1-\frac{2^n}{3^n}<1,$$

所以 $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{2}{3^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{3^3}\right)\cdots\left(1+\frac{2^{n-1}}{3^n}\right)<\mathrm{e}$. ……10 分

当 $n\geqslant 4$ 时，$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{2}{3^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{3^3}\right)\cdots\left(1+\frac{2^{n-1}}{3^n}\right)>1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^n}+\frac{2}{27}$

$$=1+\frac{2}{27}+\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)}{1-\frac{2}{3}}=2+\frac{2}{27}-\frac{2^n}{3^{n+1}}>2.$$

所以对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{2}{3^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{3^3}\right)\cdots\left(1+\frac{2^{n-1}}{3^n}\right)<m$ 成立时，

整数 m 的最小值为 3. ……12 分

21.（12 分）

【解】（1）连接 OM，MN，BM，

因为 M，N 是底面半圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的两个三等分点，

所以有 $\angle MON=\angle NOB=60^\circ$，又因为 $OM=ON=OB=2$，

所以$\triangle MON$，$\triangle NOB$都为正三角形，

所以$MN = NB = BO = OM$，

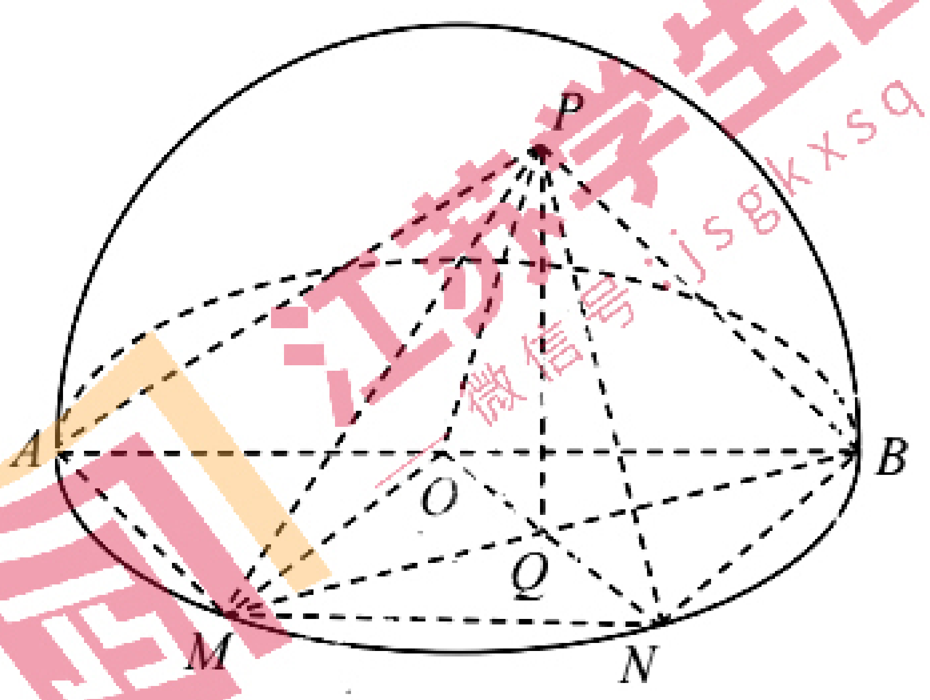
四边形$OMNB$是菱形，

记ON与BM的交点为Q，

Q为ON和BM的中点，

因为$\angle PON = 60^\circ$，$OP=ON$，

所以三角形OPN为正三角形，



所以$PQ = \sqrt{3} = \frac{1}{2}BM$，所以$PB \perp PM$，…… 2 分

因为P是半球面上一点，AB是半球O的直径，所以$PB \perp PA$，…… 4 分

因为$PM \cap PA = P$，所以$PB \perp$平面PAM. …… 6 分

（2）因为点P在底面圆内的射影恰在ON上，

由（1）知Q为ON的中点，$\triangle OPN$为正三角形，所以$PQ \perp ON$，

所以$PQ \perp$底面ABM，

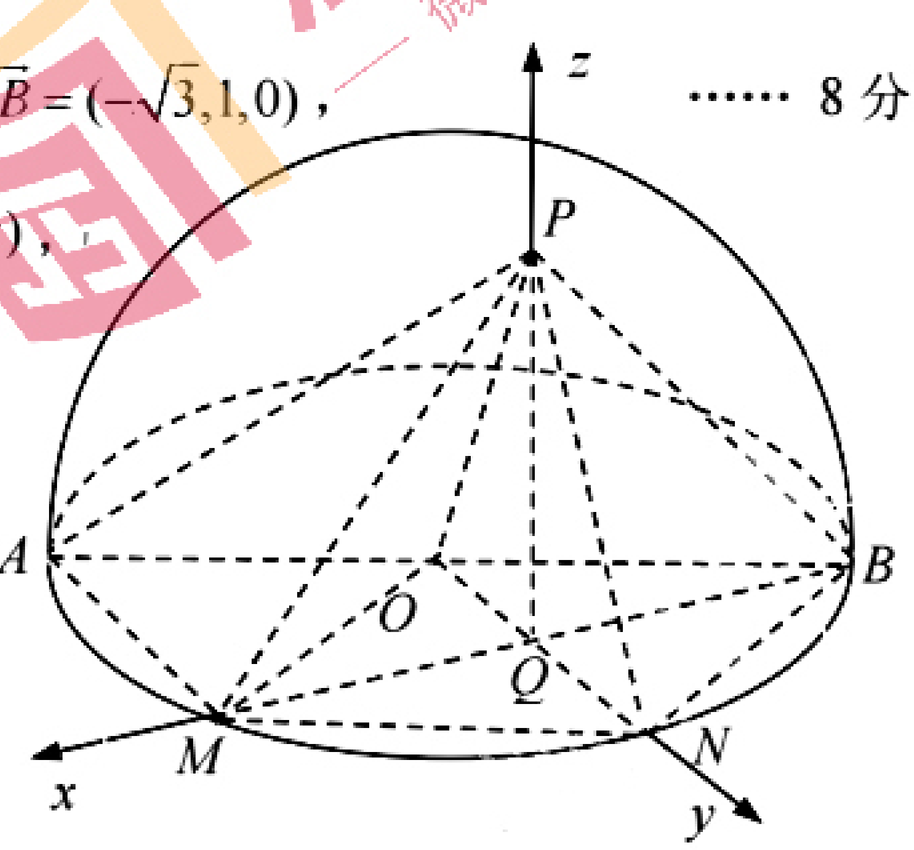
因为四边形$OMNB$是菱形，所以$MB \perp ON$，

即MB、ON、PQ两两互相垂直，

以$\{\overrightarrow{QM},\overrightarrow{QN},\overrightarrow{QP}\}$为正交基底建立空间直角坐标系$Q\text{-}xyz$，如图所示，

则$O(0,-1,0)$，$M(\sqrt{3},0,0)$，$B(-\sqrt{3},0,0)$，$N(0,1,0)$，$A(\sqrt{3},-2,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，

所以$\overrightarrow{PM} = (\sqrt{3},0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{OP} = (0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{OB} = (-\sqrt{3},1,0)$，…… 8 分



设平面PAB的一个法向量为$\boldsymbol{m} = (x,y,z)$，

则$\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OP} = 0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OB} = 0, \end{cases}$ 所以$\begin{cases} y + \sqrt{3}z = 0, \\ -\sqrt{3}x + y = 0, \end{cases}$

取$x = 1$，则$\boldsymbol{m} = (1,\sqrt{3},-1)$，……10 分

设直线PM与平面PAB的所成角为θ，

所以$\sin\theta = \left|\cos < \overrightarrow{PM},\boldsymbol{m} >\right| = \left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}\right| = \frac{\sqrt{10}}{5}$，

故直线PM与平面PAB所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$. …… 12 分

22.（12 分）

【解】（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

由 $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$ 得，$f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$，…… 2 分

当 $x=1$ 时，$f'(x)=0$；当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$.

故 $f(x)$ 的递增区间为 $(0,1)$，递减区间为 $(1,+\infty)$. …… 4 分

（2）将 $ae^b-be^a=e^a-e^b$ 变形为 $\dfrac{a+1}{e^a}=\dfrac{b+1}{e^b}$.

令 $e^a=m,e^b=n$，则上式变为 $\dfrac{1+\ln m}{m}=\dfrac{1+\ln n}{n}$，…… 6 分

即有 $f(m)=f(n)$，

于是命题转换为证明：$m+n>2$.

不妨设 $m<n$，由（1）知 $0<m<1,n>1$.

要证 $m+n>2$，

即证 $n>2-m>1$，

由于 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故即证 $f(n)<f(2-m)$，

由于 $f(m)=f(n)$，故即证 $f(m)<f(2-m)$，

即证 $f(m)-f(2-m)<0$ 在 $0<m<1$ 上恒成立. …… 9 分

令 $g(x)=f(x)-f(2-x),x\in(0,1)$，

则 $g'(x)=f'(x)+f'(2-x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}-\dfrac{\ln(2-x)}{(2-x)^2}=-\dfrac{(2-x)^2\ln x+x^2\ln(2-x)}{x^2(2-x)^2}$，

$$=-\frac{\left(4-4x+x^2\right)\ln x+x^2\ln(2-x)}{x^2(2-x)^2}=-\frac{(4-4x)\ln x+x^2\ln\left[(2-x)x\right]}{x^2(2-x)^2}\geqslant 0,$$

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内单调递增，

所以 $g(x)<g(1)=0$，即 $m+n>2$ 成立.

所以 $e^a+e^b>2$. …… 12 分