

长郡中学 2023 年下学期高二期中考试

数 学

命题人：

得分：_____

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 8 页。时量 120 分钟。满分 150 分。

第 I 卷

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 若两个不重合平面 α, β 的法向量分别为 $u=(1, 2, -1), v=(-3, -6, 3)$, 则
 - α, β 相交但不垂直
 - $\alpha \perp \beta$
 - $\alpha // \beta$
 - 以上均不正确
- 《莱因德纸草书》(Rhind Papyrus)是世界上最古老的数学著作之一,书中有一道这样的题目,请给出答案:把 100 个面包分给 5 个人,使每人所得面包个数成等差数列,且使较大的三份之和的 $\frac{1}{7}$ 是较小的两份之和,则最小的一份为
 - $\frac{5}{3}$
 - $\frac{10}{3}$
 - $\frac{5}{6}$
 - $\frac{11}{6}$
- 若直线 $y+2=kx$ 与直线 $y=3x$ 垂直,则 $k=$
 - 3
 - $\frac{1}{3}$
 - 3
 - $-\frac{1}{3}$
- 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BCA=90^\circ$, M, N 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点, $BC=CA=CC_1$, 则 BM 与 NA 所成的角的余弦值为
 - $-\frac{\sqrt{30}}{10}$
 - $\frac{\sqrt{30}}{10}$
 - $\frac{\sqrt{30}}{6}$
 - $-\frac{\sqrt{30}}{6}$
- 双曲线 C 与椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 有相同的焦点,一条渐近线的方程为 $x-2y=0$, 则双曲线 C 的标准方程为
 - $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$
 - $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{36} = 1$
 - $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$
 - $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$

数学试题(长郡版)第 1 页(共 8 页)

学 号 _____
姓 名 _____
班 级 _____
校 址 _____

6. 已知抛物线 $E: x^2 = 4y$ 和圆 $F: x^2 + (y-1)^2 = 1$, 过点 F 作直线 l 与上述两曲线自左而右依次交于点 A, C, D, B , 则 $|AC|$ 与 $|BD|$ 的乘积为

- A. 1
B. 2
C. 3
D. $\sqrt{2}$

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_{n+1}a_n + a_{n+1} - 3a_n = 0 (n \in \mathbf{N}^*)$ 且 $a_1 > 0$. 若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则 a_1 的取值范围是

- A. $(0, \frac{1}{2})$
B. $(\frac{1}{2}, 1)$
C. $(0, 1)$
D. $(0, \sqrt{2}-1)$

8. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点 A 关于原点的对称点为 B 点,

F 为其右焦点, 若 $AF \perp BF$, 设 $\angle ABF = \alpha$, 且 $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$, 则该椭圆的离心率的取值范围是

- A. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$
B. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}-1)$
C. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$
D. $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$

二、选择题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 已知 $m = (1, a+b, a-b) (a, b \in \mathbf{R})$ 是直线 l 的方向向量, $n = (1, 2, 3)$ 是平面 α 的法向量, 则下列结论正确的是

- A. 若 $l // \alpha$, 则 $5a - b + 1 = 0$
B. 若 $l // \alpha$, 则 $a + b - 1 = 0$
C. 若 $l \perp \alpha$, 则 $a + b - 2 = 0$
D. 若 $l \perp \alpha$, 则 $a - b - 3 = 0$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 那么下列数列一定是等比数列的是

- A. $\{\frac{1}{a_n}\}$
B. $\{a_n a_{n+1}\}$
C. $\{\lg(a_n^2)\}$
D. $\{a_n + a_{n+1}\}$

11. 已知 $p \in \mathbf{R}$, 直线 $l_1: x - py + p - 2 = 0$ 过定点 A , $l_2: px + y + 2p - 4 = 0$ 过定点 B , l_1 与 l_2 交于点 M , 则下列结论正确的是

- A. $l_1 \perp l_2$
B. $MA \cdot MB$ 的最大值是 25
C. 点 M 的轨迹方程是 $x^2 + y^2 - 5x = 0$
D. $MA + 2MB$ 的最大值为 $5\sqrt{5}$

数学试题(长郡版)第 2 页(共 8 页)

12. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 直线 l 与 C 交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点, 其中点 A 在第一象限, 点 M 是 AB 的中点, 作 MN 垂直于准线, 垂足为 N , 则下列结论正确的是
- A. 若以 AB 为直径作圆 M , 则圆 M 与准线相切
- B. 若直线 l 经过焦点 F , 且 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -12$, 则 $p = 4$
- C. 若 $\vec{AF} = 3\vec{FB}$, 则直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$
- D. 若以 AB 为直径的圆 M 经过焦点 F , 则 $\frac{|AB|}{|MN|}$ 的最小值为 $\sqrt{2}$

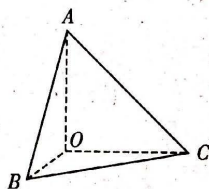
选择题答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7
答案							
题号	8	9	10	11	12	得分	
答案							

第 II 卷

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知 $\odot M$ 的圆心为 $M(3, -5)$, 且与直线 $x - 7y + 2 = 0$ 相切, 则圆 C 的面积为_____.
14. 如图, 在三棱锥 $O-ABC$ 中, OA, OB, OC 两两垂直, $OA = OC = 3$, $OB = 2$. 则直线 OB 与平面 ABC 所成角的正弦值为_____.



15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 为 C 上一点, 且 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 则当 C 的离心率 $e =$ _____ 时, 满足 $\sin \angle PF_2F_1 = 3\sin \angle PF_1F_2$.
16. 已知数列 $1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 16, \dots$, 其中第一项是 2^0 , 接下来的两项是 $2^0, 2^1$, 再接下来的三项是 $2^0, 2^1, 2^2$, 依此类推.
- (1) 这个数列的第 100 项为_____;
- (2) 整数 N 满足条件: $N > 1000$ 且该数列的前 N 项和为 2 的整数幂, 则最小整数 $N =$ _____.

数学试题(长郡版)第 3 页(共 8 页)

四、解答题(本大题共 6 小题;共 70 分.解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

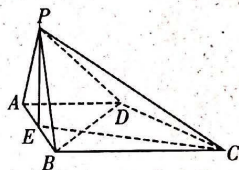
已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数,且 $a_1=2, a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.

(1)证明: $\{a_n\}$ 为等差数列,并求出通项公式;

(2)设 $b_n = (-1)^n a_n$,求 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{20}$.

18. (本小题满分 12 分)

四棱锥 $P-ABCD$ 中, $BC \parallel AD, BC \perp$ 平面 $PAB, PA = AB = BC = 2AD = 2, E$ 为 AB 的中点,且 $PE \perp EC$.



(1)求证: $BD \perp$ 平面 PEC ;

(2)求二面角 $E-PC-D$ 的正弦值.

19. (本小题满分 12 分)

已知圆 $M: x^2 + (y-2)^2 = 1$, Q 是 x 轴上的动点, QA, QB 分别切圆 M 于 A, B 两点.

(1) 求四边形 $QAMB$ 面积的最小值;

(2) 若 $|AB| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, 求 Q 点的坐标.



20. (本小题满分 12 分)

设抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线为 l , A, B 为抛物线上两动点, $AA' \perp l$, A' 为垂足, 已知 $|KA| + |AA'|$ 有最小值 $\sqrt{2}$, 其中 K 的坐标为 $(0, 1)$.

(1) 求抛物线的方程;

(2) 当 $\vec{KA} = \lambda \vec{KB} (\lambda \in \mathbf{R}, \text{且 } \lambda \neq 1)$ 时, 是否存在一定点 T 满足 $\vec{TA} \cdot \vec{TB}$ 为定值? 若存在, 求出 T 的坐标和该定值; 若不存在, 请说明理由.



卷 5 第 20 题



21. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$, $a_1=2, a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1, \frac{b_{2n}}{b_{2n-1}}=\frac{b_{2n+1}}{b_{2n}}=a_n$.

(1) 求证: 数列 $\{\frac{1}{a_n-1}\}$ 为等差数列, 并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

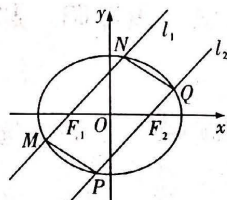
(2) 求 b_{2n+1} 的表达式;

(3) 求证: $\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_4} + \dots + \frac{1}{b_{2n}} < 1$.

22. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 焦距为 2,

上、下顶点分别为 B_1, B_2 , A 为椭圆上的点, 且满足 $k_{AB_1} \cdot k_{AB_2} = -\frac{3}{4}$.



(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 过 F_1, F_2 作两条相互平行的直线 l_1, l_2 交 C 于 M, N 和 P, Q , 顺次连接构成四边形 $PQNM$, 求四边形 $PQNM$ 面积的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

