湖南师大附中2024届高三月考试卷(三)

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	A	A	D	C	A	D	BCD	BD	ABC	CD

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. B 【解析】由题设，$A=\{x\in\mathbf{N}\mid -1<x<15\}$，$B=\{x\mid \sqrt{x+1}\in\mathbf{Q}\}$，则 $A\cap B=\{0,3,8\}$，故 $A\cap B$ 中的元素个数为3，选B.

2. C 【解析】$z=\dfrac{10-5a\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\dfrac{(10-5a\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=2+2a+(4-a)\mathrm{i}$，其实部和虚部之和等于 $(2+2a)+(4-a)=6+a=4$，解得 $a=-2$，从而 $z=-2+6\mathrm{i}$，$\bar{z}=-2-6\mathrm{i}$，故在复平面内 $\bar{z}$ 对应的点位于第三象限，选C.

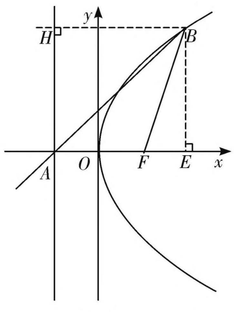
3. A 【解析】对 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=4$ 两边平方得 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=16$，又 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，故 $\boldsymbol{a}^2=4$，$\boldsymbol{b}^2=9$，代入得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{3}{2}$. 因此 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\frac{3}{2}}{2\times3}=\dfrac{1}{4}$，选A.

4. A 【解析】充分性：由 $\cos\theta<0$ 可知 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又由 $\sin 2\theta>0\Rightarrow\sin\theta<0$ 可知 $2k\pi+\pi<\theta<2\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，综上，$\pi+2k\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 θ 为第三象限角. 必要性：若 θ 为第三象限角，则 $\cos\theta<0$ 且 $\sin 2\theta>0$.
所以“$\cos\theta<0$ 且 $\sin 2\theta>0$”是“θ 为第三象限角”的充要条件. 故选：A.

5. D 【解析】将函数 $y=\log_2(2x+2)$ 的图象向下平移1个单位长度，得到 $y=\log_2(2x+2)-1$，再向右平移1个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，
则 $g(x)=\log_2[2(x-1)+2]-1=\log_2 2x-1=1+\log_2 x-1=\log_2 x$，
故选D.

6. C 【解析】对原式两边求导可得：$10(2x-1)^9\times2=a_1+2a_2(x-1)+\cdots+10a_{10}(x-1)^9$，令 $x=2$，则 $20\times3^9=a_1+2a_2+\cdots+10a_{10}$，故选C.

7. A 【解析】过 B 作准线的垂线，垂足为 H，作 x 轴的垂线，垂足为 E，则由抛物线的定义可得 $|BF|=|BH|$，由 $3\sin\angle AFB=4\sin\angle FAB$，在 $\triangle ABF$ 中由正弦定理可知：$|AB|=\dfrac{4}{3}|BF|=\dfrac{4}{3}|BH|$，$|AH|=\dfrac{\sqrt{7}}{3}|BH|$，设 BF 的倾斜角为 α，则 $\sin\alpha=\dfrac{BE}{BF}=\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$，$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，故选A.



8. D 【解析】由 a_1,a_2,a_3-1 成等差数列，得 $2a_2=a_1+a_3-1$，即 $2a_1q=a_1+a_1q^2-1$，整理得 $a_1=\dfrac{1}{(q-1)^2}$，故 $\{a_n\}$ 为正项数列，又因为等比数列 $\{a_n\}$ 单调递增，说明其公比 $q>1$. 于是 $a_{11}=\dfrac{q^{10}}{(q-1)^2}$. 设 $f(q)=\dfrac{q^5}{q-1}(q>1)$，则 $f'(q)=\dfrac{5q^4(q-1)-q^5}{(q-1)^2}=\dfrac{q^4(4q-5)}{(q-1)^2}$，所以当 $q\in\left(1,\dfrac{5}{4}\right)$ 时，$f'(q)<0$，$f(q)$ 单调递减；当 $q\in\left(\dfrac{5}{4},+\infty\right)$ 时，$f'(q)>0$，$f(q)$ 单调递增，故当 $q=\dfrac{5}{4}$ 时，$a_{11}=f^2(q)$ 取最小值. 于是可求得 $a_1=16$，$a_2=20$，$a_3=25$，$a_n\notin\mathbf{N}^*(n\geqslant4,n\in\mathbf{N}^*)$，所以集合 $A=\{a_n\mid a_n\in\mathbf{N}^*\}$ 中的元素之和为 $16+20+25=61$，选D.

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. BCD 【解析】A项，用样本估计总体，估计总体中成绩落在 $[150,400)$ 分钟内的选手人数为 $\dfrac{20+60+160+140+80}{500}\times5000=4600$，

A 项错误;B 项,平均数的估计值为$\frac{1}{500}\times(20\times175+60\times225+160\times275+140\times325+80\times375+40\times425)=307$,B 项正确;C 项,这组数据中区间$[150,300)$对应的频率为$\frac{20+60+160}{500}=0.48$,区间$[150,350)$对应的频率为$\frac{20+60+160+140}{500}=0.76$,故这组数据第 62 百分位数落在区间$[300,350)$中.设第 62 百分位数为 x,则$\frac{x-300}{350-300}=\frac{0.62-0.48}{0.76-0.48}$,解得 $x=325$,C 项正确;在由以上数据绘制的频率分布直方图中,纵坐标为频率/组距,因此各组长方形的高度之和为$\frac{1}{50}=0.02$,D 项正确.

10. BD 【解析】对于 A,当 $m=-1$,双曲线方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$,

$a=2,b=1$,渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{2}x$,故 A 错误;

对于 B,P 点坐标为$(1,n)$,则$\frac{1}{4}+\frac{n^2}{m}=1$,

解得 $m=\frac{4}{3}n^2$,$\because m<4$ 且 $m\neq0$,$\therefore 0<\frac{4}{3}n^2<4$,

所以,曲线 C 为焦点在 x 轴上的椭圆,故 B 正确;

对于 C,点 F 的坐标为$(\sqrt{4-m},0)$,

线段 PF 与 x 轴垂直,则 $x_P=\sqrt{4-m}$,$|PF|=|y_P|$,P 为 C 上任意一点,则$\frac{{x_P}^2}{4}+\frac{{y_P}^2}{m}=\frac{4-m}{4}+\frac{{y_P}^2}{m}=1-\frac{m}{4}+\frac{y_P^2}{m}=1$,则$|y_P|=\frac{|m|}{2}$.当 $m>0$,则$|PF|=\frac{m}{2}$,当 $m<0$,$|PF|=-\frac{m}{2}$,故 C 错误;

对于 D,由题意,$A(-2,0)$,$B(2,0)$,设 $P(s,t)$,

P 为 C 上任意一点,则$\frac{s^2}{4}+\frac{t^2}{m}=1$,得 $s^2-4=-\frac{4t^2}{m}$,$\therefore k_1\cdot k_2=\frac{t}{s-2}\cdot\frac{t}{s+2}=\frac{t^2}{s^2-4}=\frac{t^2}{-\frac{4t^2}{m}}=-\frac{m}{4}$.故 D 正确.

故选 BD.

11. ABC 【解析】对于 A,由题意得,点 P 的轨迹是以 B_1C_1 为直径的半圆,故 CP 长度的最小值为 $2\sqrt{2}-1$,故 A 正确;对于 B,取 B_1C_1 的中点 F,则 $EF\perp$面 BCC_1B_1,若 $CP\perp FP$(即 CP 与以 B_1C_1 为直径的半圆相切时),$CP\perp$面 EFP,故 $EP\perp PC$,所以存在点 P,使得 $EP\perp PC$,故 B 正确;对于 C,点 P 与点 B_1 重合时,$AP/\!/EC_1$,故 C 正确;对于 D,若正方体在此容器内部可以任意转动,则正方体的外接球可以放进容器,棱长为 1.5 的正方体的外接球直径为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$,此棱台可放入的最大球的直径为$\sqrt{3}$,小于正方体外接球直径,故不可以在此空心棱台容器内部任意转动,所以 D 不正确.

12. CD 【解析】对 A:由题设条件得 $f(3+x)+2(3+x)=f(3-x)+2(3-x)$,

令 $g(x)=f(x)+2x$,有 $g(3+x)=g(3-x)$,则 $g(x)$的图象关于直线 $x=3$ 对称,

因为 $f(1-2x)+f(1+2x)=4$,有 $f(1-2x)+2(1-2x)+f(1+2x)+2(1+2x)=8$,

即 $g(1-2x)+g(1+2x)=8$,则 $g(x)$的图象关于$(1,4)$对称.

所以 $g(x)+g(2-x)=8$,又 $g(3+x)=g(3-x)$,

所以 $g(4+x)=g(2-x)$,所以 $g(x)+g(4+x)=8$,

所以 $g(4+x)+g(8+x)=8$,所以 $g(x+8)=g(x)$,

所以 8 为 $g(x)$的一个周期,即 $f(x+8)+2(x+8)=f(x)+2x$,

则 $f(x+8)=f(x)-16$. A 不正确;

对 B:由上知 $g(x)$图象关于$(1,4)$对称,$x=3$ 对称,

则令 $g(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)+4$ 符合题意,而 $f(2)=g(2)-4\neq4$. B 不正确;

对 C:因为 $f(2x+1)$关于$(0,2)$对称,有 $f(-2x+1)+f(2x+1)=4$,

则 $f(x)$的图象关于$(1,2)$对称. C 符合题意;

对 D:因为 $g(x)$图象关于$(1,4)$对称,所以 $g(1)=4$,

故 $g(2025)=g(8\times253+1)=g(1)=4$,有 $f(2025)=-4046$. D 符合题意.故选 CD.

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $\pm2\sqrt{2}$ 【解析】两圆恰有三条公切线当且仅当两圆外切,因此$\sqrt{a^2+1}=2+1$,得到 $a=\pm2\sqrt{2}$.

14. $\log_3\frac{3}{2}$ 【解析】依题意 $\lambda\geqslant3^q(3-3^q)$,且 $3^q>0$,而 $3^q(3-3^q)\leqslant\frac{(3^q+3-3^q)^2}{4}$,

当且仅当 $3^q=\frac{3}{2}$,即 $q=\log_3\frac{3}{2}$时等号成立.

15. $[3-2\sqrt{3},3+2\sqrt{3}]$ 【解析】由已知点 P 的轨迹是以 C 为圆心,1 为半径的圆.取线段 AB 的中点 M,则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=PM^2-\frac{1}{4}AB^2=|PM|^2-1$,又因为$|PM|\in[|CM|-1,|CM|+1]$,$\therefore|PM|\in[\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1]$,

$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\in[3-2\sqrt{3},3+2\sqrt{3}]$.

16. $\frac{500\pi}{3}$ 【解析】分别取 BC,B_1C_1 的中点 O,O_1，则 $OO_1\perp$平面 ABC，且外接球球心 M 在直线 OO_1 上，由题意，

$AO=3,A_1O_1=4,OO_1=\sqrt{AA_1^2-(A_1O_1-AO)^2}=7$.

设 $MA=r,MO_1=x$，

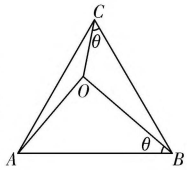
若球心在线段 OO_1 上，则 $r^2=9+(7-x)^2,r^2=4^2+x^2$，得 $x=3,r=5$；

若球心不在线段 OO_1 上，则 $r^2=9+(7+x)^2,r^2=4^2+x^2$，无正数解.

所以外接球体积为 $V=\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{500\pi}{3}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】如图，设$\angle BCO=\theta$，由于 $\theta+\angle CBO=\pi-\angle BOC=\frac{\pi}{3}$，且$\angle ABO+\angle CBO=\frac{\pi}{3}$，故$\angle ABO=\theta$. …………………………………………………………………………………………………… (2 分)



于是在 Rt$\triangle OAB$ 中，$OB=AB\cos\theta=2\cos\theta$. …………………………………… (4 分)

在$\triangle OBC$ 中，由正弦定理得$\frac{OB}{\sin\theta}=\frac{BC}{\sin\frac{2\pi}{3}}$， …………………………………… (6 分)

即$\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，于是 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

而 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，故 $\cos\angle BCO=\cos\theta=\frac{2\sqrt{7}}{7}$， …………………………………… (8 分)

$OA=AB\sin\theta=2\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$. …………………………………… (10 分)

其他做法可酌情给分.

18.【解析】(1)设数列$\{a_n\}$的公比为 q，则由条件得 $2(a_3+2)=a_2+a_4$，

又 $a_1=2$，则 $2(2q^2+2)=2q+2q^3$，

则 $4(q^2+1)=2q(1+q^2)$，因为 $1+q^2>0$，

解得 $q=2$，故 $a_n=2^n$. …………………………………… (3 分)

对于$\{b_n\}$，当 $n=1$ 时，$b_1=2$，

当 $n\geqslant2$ 时，由 $b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n}b_n=2n(n\in\mathbf{N}^*)$得

$b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n-1}b_{n-1}=2(n-1)$，

所以$\frac{1}{n}b_n=2(n\geqslant2)$，

可得 $b_n=2n$，且 $b_1=2$ 也适合，

故 $b_n=2n(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $a_n=2^n,b_n=2n$. …………………………………… (6 分)

(2)因 $c_n=(-1)^n(a_n-b_n)$，

由(1)得 $S_{2n}=c_1+c_2+\cdots+c_{2n}=-a_1+b_1+a_2-b_2-\cdots+a_{2n}-b_{2n}$

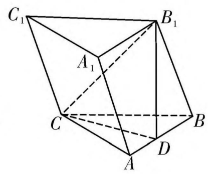
$=(-a_1+a_2-\cdots+a_{2n})+(b_1-b_2+\cdots-b_{2n})$

$=\frac{-2[1-(-2)^{2n}]}{1-(-2)}+n\times(-2)$

$=-\frac{2}{3}(1-2^{2n})-2n$

$=\frac{1}{3}\times2^{2n+1}-2n-\frac{2}{3}$. …………………………………… (12 分)

19.【解析】(1)如图，设点 D 是 AB 的中点，连接 CD,B_1D.



若选①②：由于$\triangle ABC$ 是等边三角形，故 $AB\perp CD$.

由$\angle A_1B_1C$ 为直角，故 $A_1B_1\perp B_1C$；又 $AB/\!/A_1B_1$，故 $AB\perp B_1C$.

于是 $AB\perp$平面 B_1CD，所以 $AB\perp B_1D$. …………………………………… (2 分)

因为 $BB_1=1,BD=\frac{1}{2}$，所以 $B_1D=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $B_1C=\frac{\sqrt{6}}{2},CD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因此 $B_1C^2=B_1D^2+CD^2$，故$\angle B_1DC=90°$，即 $B_1D\perp CD$. …………………………………… (4 分)

又 $B_1D\perp AB$，故 $B_1D\perp$平面 ABC，而 $B_1D\subset$平面 ABB_1A_1，所以平面 $ABC\perp$平面 ABB_1A_1. …………………………………… (5 分)

若选①③：由于$\triangle ABC$ 是等边三角形，故 $AB\perp CD$.

又平面 $ABC\perp$ 平面 ABB_1A_1，$CD\subset$ 平面 ABC，平面 $ABC\cap$ 平面 $ABB_1A_1=AB$，故 $CD\perp$ 平面 ABB_1A_1. ……………………（2 分）

而 $B_1D\subset$ 平面 ABB_1A_1，故 $CD\perp B_1D$，即 $\angle B_1DC=90°$，所以 $B_1D=\sqrt{B_1C^2-CD^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $BB_1=1$，$BD=\frac{1}{2}$，故 $BB_1^2=B_1D^2+BD^2$，所以 $\angle BDB_1=90°$，即 $AB\perp B_1D$. ……………………（4 分）

结合 $AB\perp CD$，可得 $AB\perp$ 平面 B_1CD，因此 $AB\perp B_1C$.

又 $AB//A_1B_1$，故 $A_1B_1\perp B_1C$，即 $\angle A_1B_1C$ 为直角. ……………………（5 分）

若选②③：由于 $\triangle ABC$ 是等边三角形，故 $AB\perp CD$.

由 $\angle A_1B_1C$ 为直角，故 $A_1B_1\perp B_1C$；又 $AB// A_1B_1$，故 $AB\perp B_1C$.

于是 $AB\perp$ 平面 B_1CD，所以 $AB\perp B_1D$. ……………………（2 分）

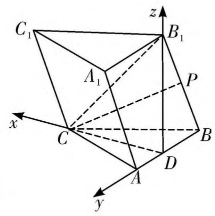
又因为平面 $ABC\perp$ 平面 ABB_1A_1，$B_1D\subset$ 平面 ABB_1A_1，平面 $ABC\cap$ 平面 $ABB_1A_1=AB$，所以 $B_1D\perp$ 平面 ABC.

又 $CD\subset$ 平面 ABC，所以 $B_1D\perp CD$，即 $\angle B_1DC=90°$. ……………………（4 分）

因为 $BB_1=1$，$BD=\frac{1}{2}$，所以 $B_1D=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $CD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $B_1C=\sqrt{B_1D^2+CD^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. ……………………（5 分）

(2)以 D 为坐标原点建立如图空间直角坐标系.



于是 $A\left(0,\frac{1}{2},0\right)$，$B\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$，$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$，$B_1\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

点 P 是棱 BB_1 上一点，可设 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DB_1}+(1-\lambda)\overrightarrow{DB}=\left(0,-\frac{1}{2}(1-\lambda),\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$. 于是 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DP}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}(1-\lambda),\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)$. ……………………（7 分）

又 $\overrightarrow{AC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设 $\boldsymbol{m}$ 是平面 ACC_1A_1 的法向量.

$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},-1)$. ……………………（9 分）

由此得 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{CP}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{CP}|}\right|=\frac{\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda)-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(1-\lambda)^2+\frac{3}{4}\lambda^2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2\lambda^2-\lambda+2}}$. ……………………（11 分）

可见当 $\lambda=\frac{1}{4}$ 时，$|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{CP}\rangle|$ 取最大值，此时直线 CP 与平面 ACC_1A_1 所成的角最大，故点 P 是棱 BB_1 上靠近 B 的四等分点. ……………………（12 分）

20.【解析】(1)填写列联表如下：

	吸收足量	吸收不足量	合计
植株存活	12	1	13
植株死亡	3	4	7
合计	15	5	20

……………………（1 分）

零假设为 H_0："植株的存活"与"制剂吸收足量"无关联.

根据列联表中的数据，经计算得到：

$\chi^2=\frac{20\times(12\times4-3\times1)^2}{13\times7\times15\times5}\approx5.934<6.635$， ……………………（3 分）

依据 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，因此可以认为 H_0 成立，即认为"植株的存活"与"制剂吸收足量"无关. ……………………（4 分）

(2)由题意得 $P(X=1)=P(X=k+1\mid X>k)=0.1$.

又 $P(X=k+1\mid X>k)=\frac{P(X=k+1)}{P(X>k)}$，故 $P(X=k+1)=0.1P(X>k)$.

把 k 换成 $k-1$，则 $P(X=k)=0.1P(X>k-1)$.

两式相减，得 $P(X=k)-P(X=k+1)=0.1P(X=k)$，即 $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=0.9(k\geqslant2)$. 又 $P(X=2)=0.1P(X>1)=0.1\times(1-P(X=1))=0.9P(X=1)$，故 $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=0.9$ 对任意 $k\in\mathbf{N}^*$ 都成立，从而 $\{P(X=k)\}$ 是首项为 0.1，公比为 0.9 的等比数列，因此 $P(X=k)=0.1\times0.9^{k-1}$. ……………………（8 分）

由定义可知 $E(X)=P(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)+\cdots+kP(X=k)+\cdots$,

而 $\sum_{i=1}^{k}iP(X=i)=0.1\sum_{i=1}^{k}i\times0.9^{i-1}$,下面先求 $\sum_{i=1}^{k}i\times0.9^{i-1}$.

$\sum_{i=1}^{k}i\times0.9^{i-1}=1\times0.9^{0}+2\times0.9^{1}+\cdots+(k-1)\times0.9^{k-2}+k\times0.9^{k-1}$,

$0.9\sum_{i=1}^{k}i\times0.9^{i-1}=1\times0.9^{1}+2\times0.9^{2}+\cdots+(k-1)\times0.9^{k-1}+k\times0.9^{k}$,

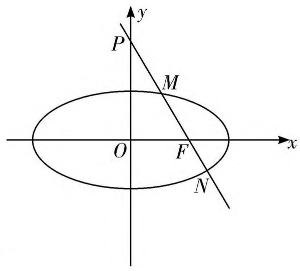
作差得 $0.1\sum_{i=1}^{k}i\times0.9^{i-1}=1+0.9^{1}+0.9^{2}+\cdots+0.9^{k-1}-k\times0.9^{k}$

$=\dfrac{1\times(1-0.9^{k})}{1-0.9}-k\times0.9^{k}=10-(k+10)\times0.9^{k}$.

所以 $\sum_{i=1}^{k}iP(X=i)=0.1\sum_{i=1}^{k}i\times0.9^{i-1}=10-k\times0.9^{k}-10\times0.9^{k}$,当 k 足够大时,$k\times0.9^{k}\approx0$,$10\times0.9^{k}\approx0$,故 $\sum_{i=1}^{k}iP(X=i)\approx10$,可认为 $E(X)=10$. …………………………………………………………………………………… (12 分)

21.【解析】(1)由题意有 $\begin{cases}a+c=3,\\ \dfrac{1}{2}bc=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ a^{2}=b^{2}+c^{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1,\end{cases}$

所以椭圆的方程为 $\dfrac{x^{2}}{4}+\dfrac{y^{2}}{3}=1$. …………………………………………………………………………………… (5 分)



(2)由题意可知直线 l 斜率 k 存在且 $k<0$,

设直线 l 方程为 $y=k(x-1)$,

代入椭圆方程为 $(3+4k^{2})x^{2}-8k^{2}x+4k^{2}-12=0$,显然 $\Delta>0$ 恒成立,

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^{2}}{3+4k^{2}}$,$x_1x_2=\dfrac{4k^{2}-12}{3+4k^{2}}$,

过点 M,N 分别作 y 轴的垂线,垂足分别为 M',N',设原点为 O,

则 $\dfrac{|PM|+|PN|}{|PF|}=\dfrac{|MM'|+|NN'|}{|OF|}=|x_1|+|x_2|$, ………………………………………… (7 分)

①当点 P 在椭圆外时,$-k>\sqrt{3}$,所以 $k<-\sqrt{3}$,

此时 $|x_1|+|x_2|=x_1+x_2=\dfrac{8k^{2}}{3+4k^{2}}=\dfrac{8}{\dfrac{3}{k^{2}}+4}$,

因为 $k^{2}>3$,所以 $4<\dfrac{3}{k^{2}}+4<5$,所以 $|x_1|+|x_2|\in\left(\dfrac{8}{5},2\right)$; …………………………………………………… (9 分)

②当点 P 在椭圆内时,$0<-k<\sqrt{3}$,所以 $-\sqrt{3}<k<0$,

则 $|x_1|+|x_2|=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^{2}-4x_1x_2}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{8k^{2}}{3+4k^{2}}\right)^{2}-4\left(\dfrac{4k^{2}-12}{3+4k^{2}}\right)}=\dfrac{12\sqrt{k^{2}+1}}{3+4k^{2}}$,

设 $\sqrt{k^{2}+1}=t$,则 $k^{2}=t^{2}-1$,且 $1<t<2$,

所以 $|x_1|+|x_2|=\dfrac{12t}{4t^{2}-1}=\dfrac{12}{4t-\dfrac{1}{t}}$,

因为函数 $y=4t-\dfrac{1}{t}$ 在 $(1,2)$ 上单调递增,所以 $4t-\dfrac{1}{t}\in\left(3,\dfrac{15}{2}\right)$,

所以 $|x_1|+|x_2|\in\left(\dfrac{8}{5},4\right)$,

当点 P 是椭圆的上顶点时,$-k=\sqrt{3}$,则 $k=-\sqrt{3}$,

此时 $|x_1|+|x_2|=x_1+x_2=\dfrac{8k^{2}}{3+4k^{2}}=\dfrac{8}{5}$,

综上,$\dfrac{|PM|+|PN|}{|PF|}$ 的取值范围为 $\left[\dfrac{8}{5},4\right)$. …………………………………………………………………………… (12 分)

22.【解析】(1)由 $f'(x)=2mx+\dfrac{-x}{e^{x}}=\dfrac{x}{e^{x}}(2me^{x}-1)$. ……………………………………………………………… (1 分)

①$m\leqslant0$ 时,由 $2me^{x}-1<0$,令 $f'(x)=0$,解得 $x=0$,

所以 $x<0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增;

$x>0$ 时,$f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减; ……………………………………………………………… (2 分)

②$m>0$ 时,由 $f'(x)=\dfrac{2mx}{e^{x}}\left(e^{x}-\dfrac{1}{2m}\right)$,

(i)$m=\dfrac{1}{2}$ 时,因为 $x(e^{x}-1)\geqslant0$,则 $f'(x)\geqslant0$,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增; ……………………………… (3 分)

(ii)$m\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$f'(x)=0$，解得$x=0$或$x=\ln\frac{1}{2m}>0$，

所以$x\in(-\infty,0)\cup\left(\ln\frac{1}{2m},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(-\infty,0)$，$\left(\ln\frac{1}{2m},+\infty\right)$单调递增；

$x\in\left(0,\ln\frac{1}{2m}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；…………（4分）

(iii)$m\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$时，由$x=\ln\frac{1}{2m}<0$，

所以$x\in\left(-\infty,\ln\frac{1}{2m}\right)\cup(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$\left(-\infty,\ln\frac{1}{2m}\right)$，$(0,+\infty)$单调递增，

$x\in\left(\ln\frac{1}{2m},0\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；…………（5分）

综上：$m\leqslant0$时，$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,0)$，单调递减区间为$(0,+\infty)$；

$m\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,0)$和$\left(\ln\frac{1}{2m},+\infty\right)$，单调递减区间为$\left(0,\ln\frac{1}{2m}\right)$；

$m=\frac{1}{2}$时，$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,+\infty)$；

$m\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$时，$f(x)$的单调递增区间为$\left(-\infty,\ln\frac{1}{2m}\right)$和$(0,+\infty)$，单调递减区间为$\left(\ln\frac{1}{2m},0\right)$；…………（6分）

(2)根据题意结合(1)可知$m\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$时，$f(x)$存在两个极值点，

由b为$f(x)$的零点，则$mb^2+\frac{b+1}{e^b}=0$，则$-mb^2=\frac{b+1}{e^b}<0$，故$b\in(-\infty,-1)$，…………（7分）

若$m\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，由(1)可知$a=0$，则$a-b>0-(-1)=1>\ln 2$；…………（8分）

若$m\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，则$a=\ln\frac{1}{2m}$，

故$\begin{cases}\frac{b+1}{e^b}+mb^2=0,\\ e^a=\frac{1}{2m},\end{cases}$化简得$\begin{cases}m=-\frac{b+1}{b^2e^b},\\ m=\frac{1}{2e^a},\end{cases}$即$\frac{1}{2e^a}=-\frac{b+1}{b^2e^b}$，

故$-2e^{a-b}=\frac{b^2}{b+1}=(b+1)+\frac{1}{(b+1)}-2\leqslant-2\sqrt{(-b-1)\frac{1}{(-b-1)}}-2=-4(b+1<0)$，…………（10分）

当且仅当$-b-1=\frac{1}{-b-1}$，即$b=-2$时等号成立，即$e^{a-b}\geqslant2$，

故$a-b\geqslant\ln 2$，当且仅当$\begin{cases}b=-2,\\ m=\frac{e^2}{4}\end{cases}$时取等号，综上，$a-b\geqslant\ln 2$恒成立．…………（12分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。