高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合、常用逻辑用语、函数、导数、三角函数、三角恒等变换、解三角形、平面向量。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 p：$\exists\theta\in(0,\pi)$，$\sin\theta<0$，则 $\neg p$ 为

A. $\exists\theta\in(0,\pi)$，$\sin\theta\geqslant0$　　B. $\exists\theta\notin(0,\pi)$，$\sin\theta<0$

C. $\forall\theta\notin(0,\pi)$，$\sin\theta<0$　　D. $\forall\theta\in(0,\pi)$，$\sin\theta\geqslant0$

2. 设集合 $A=\{x|y=\ln(x-3)\}$，$B=\{x|x\leqslant-1\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=$

A. $\{x|-1\leqslant x\leqslant3\}$　　B. $\{x|-1<x\leqslant3\}$　　C. $\{x|-1\leqslant x<3\}$　　D. $\{x|-1<x<3\}$

3. 已知 $P(1,m)$ 是角 θ 的终边上一点，$\tan\theta=-2$，则 $\sin\theta=$

A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和实数 λ，则"$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$"是"$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 扇子是引风用品，夏令必备之物. 我国传统扇文化源远流长，是中华文化的一个组成部分. 历史上最早的扇子是一种礼仪工具，后来慢慢演变为纳凉、娱乐、观赏的生活用品和工艺品. 扇子的种类较多，受大众喜爱的有团扇和折扇. 如图 1 是一把折扇，是用竹木做扇骨，用特殊纸或绫绢做扇面而制成的. 完全打开后的折扇为扇形（如图 2），若图 2 中 $\angle AOB=\theta$，C，D 分别在 OA，OB 上，$AC=BD=m$，$\overset{\frown}{AB}$ 的长为 l，则该折扇的扇面 $ABDC$ 的面积为

图 1

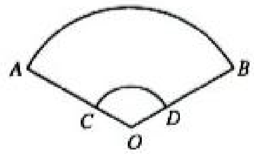


图 2

A. $\frac{m(l-\theta)}{2}$　　B. $\frac{m(l-\theta m)}{2}$　　C. $\frac{m(2l-\theta)}{2}$　　D. $\frac{m(2l-\theta m)}{2}$

6. 已知 $a=\left(\frac{3}{2}\right)^{-0.6}$，$b=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$，$c=\left(\frac{2}{3}\right)^{0.9}$，则

A. $b>c>a$　　B. $c>a>b$

C. $b>a>c$　　D. $a>c>b$

7. 已知 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=$

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{2}}{9}$　　D. $\frac{7}{9}$

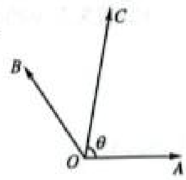
8. 已知函数 $f(x)=-x^2+ax+1$ 在$[1,2]$上的最大值也是其在$[1,2]$上的极大值，则 a 的取值范围是

A. $[2,+\infty)$　　B. $[4,+\infty)$　　C. $[2,4]$　　D. $(2,4)$

9. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x-\frac{1}{2}$，若将其图象向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度后所得到的图象关于原点对称，则 φ 的最小值为

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

10. 如图，已知两个单位向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$和向量$\overrightarrow{OC}$，$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{2}$. $\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OC}$的夹角为 θ，且 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{OC}$的夹角为$\frac{\pi}{4}$，若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}(x,y\in\mathbf{R})$，则 $x-y=$



A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

11. 在$\triangle ABC$中，D 为 BC 上一点，$\angle BAD=\angle CAD$，若 $AC=AD=\frac{1}{2}AB=2$，则 $BC=$

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{5}$

12. 已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，若 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(4+x)+f(-x)=0$，且 $f(x+1)$为偶函数，$f(1)=-1$，则 $f(2\ 023)=$

A. 1　　B. -1

C. 2　　D. -2

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 函数 $f(x)=\log_a(x+1)+2^x(a>0$，且 $a\neq1)$的图象过定点________.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°，若$(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则 $k=$________.

15. 已知函数 $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$，则曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为________.

16. 函数 $y=\frac{\sin x-\cos x}{2-\sin x\cos x}$的值域为________.

三、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分10分）

已知向量 $\boldsymbol{a}=(2\cos^2x,\sin x)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\sqrt{3}\cos x\right)$，$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间；

(2)在△ABC 中，$A+B=\frac{7}{12}\pi$，$f(A)=1$，$BC=2\sqrt{3}$，求边 AC 的长.

18.（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=\log_3(m^x+1)-x(m>0$，且 $m\neq1)$ 是偶函数.

(1)求 m 的值；

(2)若关于 x 的不等式 $\frac{1}{2}\cdot3^{f(x)}-3[(\sqrt{3})^x+(\sqrt{3})^{-x}]+a\leqslant0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有解，求实数 a 的最大整数值.

19.（本小题满分12分）

已知 $\sin\alpha$ 是方程 $5x^2-7x-6=0$ 的根.

(1)求 $\dfrac{\sin\left(-\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cdot\cos(2\pi-\alpha)\cdot\tan(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$ 的值；

(2)若 α 是第四象限角，$\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{13}\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$，求 $\sin\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

20.（本小题满分 12 分）

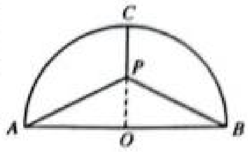
已知函数 $f(x)=a\ln x-x(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},e^2\right]$ 上有 2 个零点，求 a 的取值范围.

21.（本小题满分 12 分）

南京玄武湖号称“金陵明珠”，是我国仅存的皇家园林湖泊. 在玄武湖的一角有大片的荷花，每到夏季，荷花飘香，令人陶醉. 夏天的一个傍晚，小胡和朋友游玄武湖，发现观赏荷花只能在岸边，无法深入其中，影响观赏荷花的乐趣，于是他便有了一个愿景：若在玄武湖一个盛开荷花的一角（该处岸边近似半圆形，如图所示）设计一些栈道和一个观景台，观景台 P 在半圆形的中轴线 OC 上（图中 OC 与直径 AB 垂直，P 与 O,C 不重合），通过栈道把 PA,PB,PC,AB 连接起来，使人行在其中，犹如置身花海之感. 已知 $AB=200$ m，$\angle PAB=\theta$，栈道总长度为函数 $f(\theta)$.



(1)求 $f(\theta)$；

(2)若栈道的造价为每米 5 万元，试确定观景台 P 的位置，使实现该愿景的建造费用最小（观景台的建造费用忽略不计），并求出实现该愿景的建造费用的最小值.

22.（本小题满分 12 分）

在锐角$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，S 为$\triangle ABC$ 的面积，且 $a^2=2S+(b-c)^2$.

(1)求 $\tan A$ 的值；

(2)若 $a=8$，证明：$16<b+c\leqslant 8\sqrt{5}$.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. D 由含有量词的命题的否定的特点知$\neg p$为“$\forall\theta\in(0,\pi)$，$\sin\theta\geqslant 0$”. 故选 D.

2. B 由题意得$A=\{x\mid x>3\}$，$A\cup B=\{x\mid x\leqslant -1$，或$x>3\}$，则$\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}$. 故选 B.

3. A 由三角函数的定义知$\tan\theta=m=-2$，所以$\sin\theta=\frac{-2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故选 A.

4. A 若$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，由共线向量定理知$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，知“$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$”是“$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线”的充分条件；若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，如$\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(0,0)$，则$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$不成立，故“$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$”不是“$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线”的必要条件. 综上，“$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$”是“$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线”的充分不必要条件. 故选 A.

5. D 由弧长公式可知，$l=\theta\cdot OA$，所以$OA=\frac{l}{\theta}$，则$OC=\frac{l}{\theta}-m$，所以该折扇的扇面的面积为$\frac{1}{2}l\cdot\frac{l}{\theta}-\frac{1}{2}\theta\cdot\left(\frac{l}{\theta}-m\right)^2=\frac{m(2l-m\theta)}{2}$. 故选 D.

6. C $1=\left(\frac{3}{2}\right)^0>\left(\frac{3}{2}\right)^{-0.6}=\left(\frac{2}{3}\right)^{0.6}>\left(\frac{2}{3}\right)^{0.9}$，即$1>a>c$，又$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}=\log_3 4>1$，所以$b>a>c$. 故选 C.

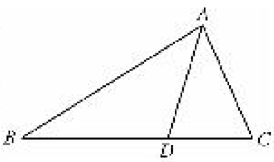
7. D $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos 2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=1-2\times\frac{1}{9}=\frac{7}{9}$. 故选 D.

8. D $f'(x)=a-2x$，令$f'(x)=0$，得$x=\frac{a}{2}$，由题意得$\frac{a}{2}\in(1,2)$，所以$a\in(2,4)$. 故选 D.

9. A 因为$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，将其图象向左平移$\varphi(\varphi>0)$个单位长度后得到函数$y=\sin\left(2x+2\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$的图象，因为$y=\sin\left(2x+2\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$的图象关于原点对称，所以$2\varphi-\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即$\varphi=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，由于$\varphi>0$，当$k=0$时，$\varphi$取得最小值$\frac{\pi}{12}$. 故选 A.

10. B 由$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\theta\in[0,\pi]$，得$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，所以$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{5}$，由题意得$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=1\times\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1\times\sqrt{2}\cos\theta=\frac{1}{5}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\frac{3}{5}$，在$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$两边分别点乘$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=x-\frac{3}{5}y=\frac{1}{5}$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{3}{5}x+y=1$，两式联立并解得$\begin{cases}x=\frac{5}{4},\\ y=\frac{7}{4}.\end{cases}$所以$x-y=-\frac{1}{2}$. 故选 B.

11. C 设$\angle BAC=\theta$，由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BAD}+S_{\triangle CAD}$，得$\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\theta=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin\frac{\theta}{2}$，即$2\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}$，所以$4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=3\sin\frac{\theta}{2}$，因为$\theta\in(0,\pi)$，所以$\sin\frac{\theta}{2}\neq 0$，所以$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{3}{4}$，所以$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{1}{8}$，所以$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\theta=16+4-2\times4\times2\times\frac{1}{8}=18$，所以$BC=3\sqrt{2}$. 故选 C.



12. A 因为$f(x+1)$为偶函数，即$f(-x+1)=f(x+1)$，所以$f(x)=f(2-x)$，又由$f(4+x)+f(-x)=0$，所以$f(x+2)=-f(2-x)=-f(x)$，所以$f(x+4)=f(x)$，故$f(x)$为周期函数且4是一个周期，所以$f(2\ 023)=f(3)=-f(1)=1$. 故选 A.

13. $(0,1)$ 当$x=0$时，a在$(0,1)\cup(1,+\infty)$上无论取何值，$f(x)$的值总为1，故函数$f(x)$的图象过定点$(0,1)$.

14. $\frac{4}{5}$ 因为$|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为120°，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 120^\circ=5\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-10$. 由$(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，得$(k\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{b}^2+(k-2)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=25k-2\times16-10(k-2)=15k-12=0$，解得$k=\frac{4}{5}$.

15. $2x-y-1=0$ $f'(x)=\frac{e^x-(x-1)e^x}{\ldots}=\frac{2-x}{\ldots}$，所以$f'(0)=2$，又$f(0)=-1$，故所求切线方程为$y-(-1)=$

15. $2x-y-1=0$　$f'(x)=\frac{e^x-(x-1)e^x}{(e^x)^2}=\frac{2-x}{e^x}$，所以 $f'(0)=2$，又 $f(0)=-1$，故所求切线方程为 $y-(-1)=2(x-0)$，即 $2x-y-1=0$.

16. $\left[-\frac{2\sqrt{2}}{5},\frac{2\sqrt{2}}{5}\right]$　令 $t=\sin x-\cos x$，则 $\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}(-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$，所以 $y=\frac{2t}{3+t^2}(-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$，当 $t=0$ 时，$y=0$，当 $-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$，且 $t\neq0$ 时，$y=\frac{2}{t+\frac{3}{t}}$，令 $u=t+\frac{3}{t}$，易知 u 的值域为 $\left(-\infty,-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{5\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$，所以 $y=\frac{2}{t+\frac{3}{t}}$ 的取值范围为 $\left[-\frac{2\sqrt{2}}{5},0\right)\cup\left(0,\frac{2\sqrt{2}}{5}\right]$. 综上所述，所求函数的值域为 $\left[-\frac{2\sqrt{2}}{5},\frac{2\sqrt{2}}{5}\right]$.

17. 解：(1)由题意得 $f(x)=\cos^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，…… 2分

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，…… 3分

令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，…… 4分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$. …… 5分

(2)由(1)知 $f(A)=\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}=1$，

所以 $\sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $2A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right)$，所以 $2A+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. …… 7分

因为 $A+B=\frac{7}{12}\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$，…… 8分

由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$，所以 $AC=\frac{BC\sin B}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{2}$. …… 10分

18. 解：(1)因 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)=f(-x)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

即 $\log_3(m^{-x}+1)+x=\log_3(m^x+1)-x$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，…… 2分

又 $\log_3(m^{-x}+1)=\log_3\frac{m^x+1}{m^x}=\log_3(m^x+1)-\log_3 m^x=\log_3(m^x+1)-x\log_3 m$，

所以 $\log_3(m^x+1)-x\log_3 m+x=\log_3(m^x+1)-x$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，…… 4分

即 $x(\log_3 m-2)=0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

必须 $\log_3 m-2=0$，即 $m=9$.

故 $m=9$. …… 6分

(2)由(1)知，$f(x)=\log_3(9^x+1)-x$，

故 $3^{f(x)}=3^{\log_3(9^x+1)-x}=3^x+\frac{1}{3^x}$. …… 7分

设 $t=(\sqrt{3})^x+(\sqrt{3})^{-x}(t\geqslant2)$，则 $t^2=3^x+\frac{1}{3^x}+2$，即 $3^x+\frac{1}{3^x}=t^2-2$，

所以原问题等价于关于 t 的不等式 $\frac{1}{2}t^2-3t+a-1\leqslant0$ 在 $[2,+\infty)$ 上有解，

所以 $a\leqslant\left(-\frac{1}{2}t^2+3t+1\right)_{\max}$，…… 9分

又 $y=-\frac{1}{2}t^2+3t+1=-\frac{1}{2}(t-3)^2+\frac{11}{2}$，$t\in[2,+\infty)$，…… 10分

所以当 $t=3$ 时，$y_{\max}=\frac{11}{2}$，

所以 $a\leqslant\frac{11}{2}$，故实数 a 的最大整数值为 5. …… 12分

19. 解：(1)由 $\sin\alpha$ 是方程 $5x^2-7x-6=0$ 的根，得 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ 或 $\sin\alpha=2$(舍)，…… 1分

原式 $=\frac{-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\times\cos\alpha\times(-\tan\alpha)}{\sin\alpha\times(-\sin\alpha)}=\frac{\cos\alpha(-\sin\alpha)\cos\alpha(-\tan\alpha)}{-\sin^2\alpha}$

$=\frac{\cos\alpha\cos\alpha\times\left(-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}{\sin\alpha}=-\cos\alpha$，…… 3分

由 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，所以 α 是第三象限或第四象限角，

若 α 是第三象限角，则 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，此时 $-\cos\alpha=\frac{4}{5}$；…… 4分

若 α 是第四象限角，则 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，此时 $-\cos\alpha=-\frac{4}{5}$. …… 5分

故所求式子的值为 $\frac{4}{5}$ 或 $-\frac{4}{5}$. …… 6分

(2)由(1)知，当 α 是第四象限角时，$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，…… 7分

由 $\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{13}\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$，得 $\cos\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{12}{13}$，…… 8分

所以 $\sin\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[\alpha-\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)\right]$ …… 10分

$=\sin\alpha\cos\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\alpha\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}=-\frac{56}{65}$. …… 12分

20. 解：(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{a}{x}-1=\frac{a-x}{x}(x>0)$. …… 1分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；…… 2分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0(x>0)$，得 $0<x<a$，令 $f'(x)<0$，得 $x>a$，…… 3分

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，在 $(a,+\infty)$ 上单调递减. …… 4分

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，在 $(a,+\infty)$ 上单调递减.
…… 5分

(2)若 $a=0$，$f(x)=-x$，在 $\left[\frac{1}{e},e^2\right]$ 上无零点，不合题意；…… 6分

若 $a\neq 0$，由 $f(x)=0$，得 $\frac{1}{a}=\frac{\ln x}{x}$，…… 7分

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，则直线 $y=\frac{1}{a}$ 与函数 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},e^2\right]$ 上的图象有两个交点，…… 8分

$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $\frac{1}{e}<x<e$ 时，$g'(x)>0$，当 $e<x<e^2$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上单调递增，在 $[e,e^2]$ 上单调递减. …… 9分

所以 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$，

又 $g\left(\frac{1}{e}\right)=-e$，$g(e^2)=\frac{2}{e^2}$，…… 10分

所以要使直线 $y=\frac{1}{a}$ 与 $g(x)\left(x\in\left[\frac{1}{e},e^2\right]\right)$ 的图象有两个交点，则 $\frac{2}{e^2}\leqslant\frac{1}{a}<\frac{1}{e}$，…… 11分

所以 $e<a\leqslant\frac{e^2}{2}$，即实数 a 的取值范围为 $\left(e,\frac{e^2}{2}\right]$. …… 12分

21. 解：(1)由题意知 $\angle PAB=\theta$，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$，$OC\perp AB$，$OA=OB=100$，…… 1分

则 $PA=PB=\frac{100}{\cos\theta}$，$PO=100\tan\theta$，所以 $PC=100-100\tan\theta$，…… 3分

所以 $f(\theta)=PA+PB+PC+AB=\frac{200}{\cos\theta}+100-100\tan\theta+200=100\left(\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}+3\right)\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$. …… 4分

(2)建造栈道的费用 $F(\theta)=5f(\theta)=500\left(\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}+3\right)$，…… 5分

$F'(\theta)=500\times\frac{2\sin\theta-1}{\cos^2\theta}$，…… 6分

令 $F'(\theta)=0$，得 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，又 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$. …… 7分

当 $0<\theta<\frac{\pi}{6}$ 时，$F'(\theta)<0$，当 $\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{4}$ 时，$F'(\theta)>0$，

所以 $F(\theta)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，…… 9分

所以 $F(\theta)_{\min}=F\left(\frac{\pi}{6}\right)=500(3+\sqrt{3})$，此时 $PC=100-100\tan\frac{\pi}{6}=100-\frac{100\sqrt{3}}{3}$，…… 11分

故观景台位于离岸边半圆弧中点距离为 $\left(100-\frac{100\sqrt{3}}{3}\right)$ 米时，建造费用最小，最小费用为 $500(3+\sqrt{3})$ 万元. …… 12分

22. (1)解：因为△ABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$，$2S=a^2-(b-c)^2$，

所以 $bc\sin A=a^2-b^2-c^2+2bc$，…… 1分

由余弦定理，得 $a^2-b^2-c^2=-2bc\cos A$，…… 2分

所以 $bc\sin A=2bc-2bc\cos A$，因为 $bc\neq0$，

所以 $\sin A+2\cos A=2$，…… 3分

又 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin^2A+\cos^2A=1$，所以 $\sin A+2\sqrt{1-\sin^2A}=2$，…… 4分

化简得 $5\sin^2A-4\sin A=0$，解得 $\sin A=\frac{4}{5}$ 或 $\sin A=0$（不合题意，舍去）. …… 5分

因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{3}{5}$，$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{4}{3}$. …… 6分

(2)证明：由正弦定理，得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{8}{\frac{4}{5}}=10$，

所以 $b=10\sin B$，$c=10\sin C=10\sin(A+B)$， ………… 7 分

所以 $b+c=10\sin B+10\sin(A+B)=16\sin B+8\cos B=8\sqrt{5}\sin(B+\varphi)$，其中 φ 为锐角，且 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

………… 8 分

因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $-\frac{\pi}{2}<A-\varphi<\frac{\pi}{2}$，

又 $\sin A>\sin\varphi$，所以 $A>\varphi$，所以 $0<A-\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\frac{\pi}{2}-A+\varphi<\frac{\pi}{2}$， ………… 9 分

又$\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2},\\0<B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$即$\begin{cases}0<\pi-A-B<\frac{\pi}{2},\\0<B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$所以$\begin{cases}\frac{\pi}{2}-A<B<\pi-A,\\0<B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$

所以$\frac{\pi}{2}-A<B<\frac{\pi}{2}$. ………… 10 分

所以$\frac{\pi}{2}-A+\varphi<B+\varphi<\frac{\pi}{2}+\varphi$，

因为函数 $y=\sin x$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减，

且 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-A+\varphi\right)=\cos(\varphi-A)=\cos\varphi\cos A+\sin\varphi\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $8\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}<8\sqrt{5}\sin(B+\varphi)\leqslant8\sqrt{5}$，即 $16<b+c\leqslant8\sqrt{5}$. ………… 12 分