高三数学参考答案

1. B　因为 $\bar{z}=(2+\mathrm{i})\mathrm{i}^3=(2+\mathrm{i})(-\mathrm{i})=1-2\mathrm{i}$，所以 $z=1+2\mathrm{i}$.

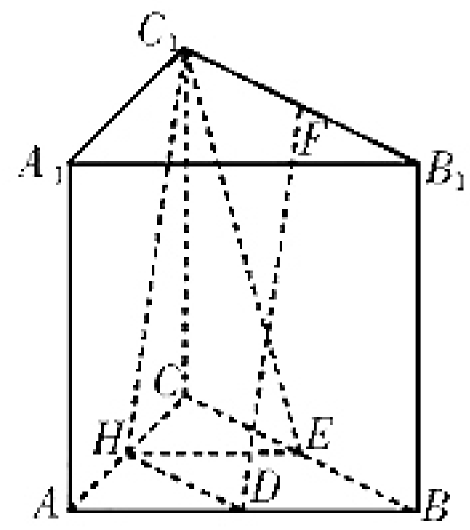
2. A　由题意可得 $A=\{x|x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant4\}$. 因为 $A\cup B=\mathbf{R}$，所以 $a+3\geqslant4$，解得 $a\geqslant1$.

3. C　将这组数据按从小到大的顺序排列为 57，62，65，69，72，74，78，83，85，89，91，95. 因为 $12\times60\%=7.2$，所以这 12 名同学这次测试的数学成绩的第 60 百分位数是 83.

4. A　设该抛物线方程为 $x^2=-2py(p>0)$，则点 $(12,-12)$ 在该抛物线上，从而 $12^2=-2p\times(-12)$，解得 $p=6$，故该抛物线的焦点坐标是 $(0,-3)$.

5. A　设 $f(x)=x^2-2x+a$，$x\in[-1,2]$，则 $f(x)_{\max}=f(-1)=3+a$. 由 p 为真命题，得 $3+a<0$，解得 $a<-3$. 由 q 为真命题，得 $\Delta=16-4a\geqslant0$，解得 $a\leqslant4$. 综上，$-3\leqslant a\leqslant4$.

6. D　如图，取棱 AC 的中点 H，连接 DH，EH，C_1H，易证四边形 DHC_1F 是平行四边形，则 $C_1H/\!/DF$，故 $\angle EC_1H$ 是异面直线 DF 与 C_1E 所成的角或补角. 设 $AB=2$，则 $EH=1$，$C_1H=C_1E=\sqrt{5}$. 在 $\triangle C_1EH$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle EC_1H=\dfrac{C_1H^2+C_1E^2-EH^2}{2C_1H\cdot C_1E}=\dfrac{9}{10}$.



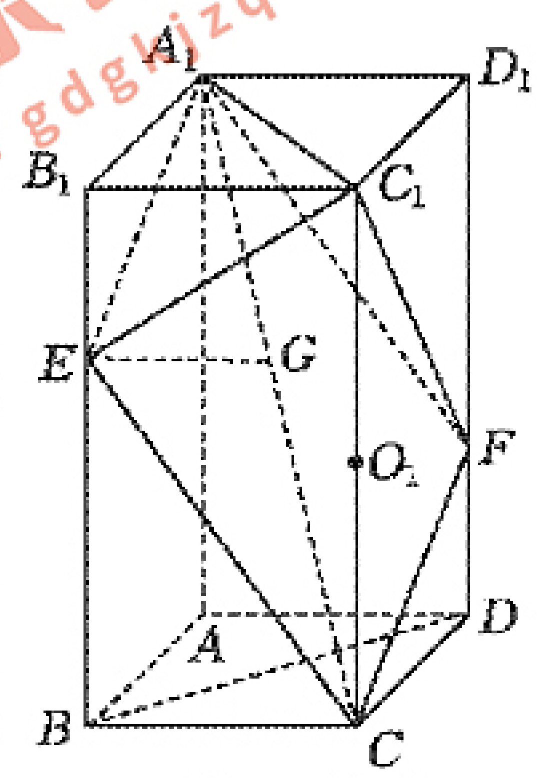
7. B　由题意可得 $f(x)=2\sin^2\omega x+\sqrt{3}\sin 2\omega x=\sqrt{3}\sin 2\omega x-\cos 2\omega x+1=2\sin(2\omega x-\dfrac{\pi}{6})+1$. 因为 $0<x<\pi$，所以 $-\dfrac{\pi}{6}<2\omega x-\dfrac{\pi}{6}<2\omega\pi-\dfrac{\pi}{6}$. 因为 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上恰有两个零点，所以 $\dfrac{11\pi}{6}<2\omega\pi-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{19\pi}{6}$，解得 $1<\omega\leqslant\dfrac{5}{3}$.

8. B　设 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$. 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，从而 $f(x)>f(0)=0$，即 $\mathrm{e}^x-x-1>0$，即 $\mathrm{e}^x-1>x$，故 $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}-1>\dfrac{1}{3}$，即 $b>\dfrac{1}{3}$. 设 $g(x)=\ln(1+x)-x(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{-x}{1+x}$. 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，从而 $g(x)<g(0)=0$，即 $\ln(1+x)-x<0$，即 $\ln(1+x)<x$，故 $\ln(1+\dfrac{1}{3})<\dfrac{1}{3}$. 因为 $c=2\ln 2-\ln 3=\ln(1+\dfrac{1}{3})$，所以 $c<\dfrac{1}{3}$，则 $c<\dfrac{1}{3}<b$，即 $c<b$. 设 $h(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}(x>0)$，则 $h'(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$. 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，从而 $h(x)>h(0)=0$，即 $\ln(1+x)>\dfrac{x}{1+x}$，即 $\ln(1+\dfrac{1}{3})>\dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}$，即 $\ln\dfrac{4}{3}>\dfrac{1}{4}$，故 $a<c$，即 $a<c<b$.

9. AD　由题意可知圆 C_n 的圆心坐标为 $(n,0)$，半径为 n，则圆心到 y 轴的距离等于圆 C_n 的半径，则 A 正确. 由圆 C_n 与直线 $y=x+2$ 相切，得 $\dfrac{|n+2|}{\sqrt{2}}=n$，解得 $n=2\sqrt{2}+2$，则 B 错误. 当

$n=5$ 时，圆 $C_n:(x-5)^2+y^2=25$，则 C_n 上的整点有 $(0,0)$，$(1,3)$，$(1,-3)$，$(2,4)$，$(2,-4)$，$(5,5)$，$(5,-5)$，$(8,4)$，$(8,-4)$，$(9,3)$，$(9,-3)$，$(10,0)$，共 12 个，则 C 错误. 圆心到直线 $y=x$ 的距离 $d=\frac{n}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}n$，则 $n-\frac{\sqrt{2}}{2}n<\sqrt{2}<n+\frac{\sqrt{2}}{2}n$，解得 $2\sqrt{2}-2<n<2\sqrt{2}+2$，故 D 正确.

10. BCD　由 A_1,C,E,F 四点共面，得 $CF/\!/A_1E$，则 $DF=B_1E$，若 E 不是棱 BB_1 的中点，则 $BE\neq DF$，故 A 错误. 当 E 是棱 BB_1 的中点时，取 A_1C 的中点 G，连接 GE，B_1D，则 G 为 B_1D 的中点. 因为 E 为 BB_1 的中点，则 $GE/\!/BD$. 因为 $GE\subset$ 平面 A_1CE，$BD\not\subset$ 平面 A_1CE，所以 $BD/\!/$ 平面 A_1CE，则 B 正确. 因为 $\triangle A_1CC_1$ 的面积为定值，点 E,F 到平面 A_1CC_1 的距离为定值，所以三棱锥 $E\text{-}A_1CC_1$ 和三棱锥 $F\text{-}A_1CC_1$ 的体积都为定值，则四棱锥 $C_1\text{-}A_1ECF$ 的体积为定值，故 C 正确. 取棱 CC_1 的中点 O_1，由题中数据可得 O_1 是 $\triangle CC_1E$ 外接圆的圆心，$\triangle CC_1E$ 外接圆的半径 $r=2$. 设三棱锥 $E\text{-}A_1CC_1$ 的外接球的球心为 O，半径为 R，设 $OO_1=d$，则 $R^2=d^2+r^2=O_1B_1^2+(A_1B_1-d)^2=8+(2-d)^2$，解得 $R^2=8$，从而三棱锥 $E\text{-}A_1CC_1$ 的外接球的表面积是 $4\pi R^2=32\pi$，故 D 正确.



11. ABD　因为 $f(x-1)+f(x+1)=0$，所以 $f(x+1)+f(x+3)=0$，所以 $f(x-1)=f(x+3)$，即 $f(x)=f(x+4)$，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，则 A 正确. 因为 $f(1-x)=f(x+5)$，所以 $f(1-x)=f(x+1)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则 B 正确. 因为 $f(\frac{5}{2})=1$，所以 $f(-\frac{3}{2})=1$. 令 $x=\frac{3}{2}$，得 $f(\frac{1}{2})+f(\frac{5}{2})=0$，则 $f(\frac{1}{2})=-1$. 因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(\frac{3}{2})=f(\frac{1}{2})=-1$，则 $f(\frac{3}{2})\neq f(-\frac{3}{2})$，从而 $f(x)$ 不是偶函数，则 C 错误. 由 $f(x)$ 的对称性与周期性可得 $f(\frac{1}{2})=f(\frac{3}{2})=-1$，$f(\frac{5}{2})=f(\frac{7}{2})=1$，则 $f(\frac{1}{2})+2f(\frac{3}{2})+3f(\frac{5}{2})+\cdots+30f(\frac{59}{2})=7(-1-2+3+4)-29-30=-31$，故 D 正确.

12. 75　因为 $a_8=5$，所以 $a_1+a_{15}=2a_8=10$，则 $S_{15}=\frac{(a_1+a_{15})\times15}{2}=\frac{10\times15}{2}=75$.

13. 10800　先将歌曲和舞蹈节目排好，有 $\mathrm{A}_5^5=120$ 种，再将小品、相声、魔术这 3 个节目排好，有 $3\mathrm{C}_5^3+\mathrm{C}_5^2\cdot3\mathrm{A}_2^2=90$ 种，则该班元旦晚会的节目表演不同的安排方式有 $120\times90=10800$ 种.

14. $\frac{\sqrt{41}}{3}$　设 $|BF_1|=m$，则 $|AF_1|=4m$. 由双曲线的定义可得 $|BF_2|=m+2a$，$|AF_2|=4m-2a$. 因为 $|AF_2|=|BF_2|$，所以 $m+2a=4m-2a$，所以 $m=\frac{4a}{3}$，则 $|BF_1|=\frac{4a}{3}$，$|AF_1|=\frac{16a}{3}$，$|AF_2|=|BF_2|=\frac{10a}{3}$. 在 $\triangle BF_1F_2$ 中，由余弦定理可得 $|BF_2|^2=|BF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|BF_1||F_1F_2|\cos\angle BF_1F_2$，即 $\frac{100}{9}a^2=\frac{16}{9}a^2+4c^2-\frac{16}{3}ac\cos\angle BF_1F_2$，即 $\frac{16}{3}ac\cos\angle BF_1F_2=$

$4c^2-\frac{28}{3}a^2$. 在$\triangle AF_1F_2$中，由余弦定理可得$|AF_2|^2=|AF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|AF_1||F_1F_2|\cdot$ $\cos\angle BF_1F_2$，则$\frac{100}{9}a^2=\frac{256}{9}a^2+4c^2-\frac{64}{3}ac\cos\angle BF_1F_2$，即$\frac{16}{3}ac\cos\angle BF_1F_2=\frac{13}{3}a^2+c^2$，从而$4c^2-\frac{28}{3}a^2=\frac{13}{3}a^2+c^2$，即$3c^2=\frac{41}{3}a^2$，即$\frac{c^2}{a^2}=\frac{41}{9}$，故$e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{41}}{3}$.

15. 解：(1)因为$a\sin C=c\sin(A+\frac{\pi}{3})$，所以$\sin A\sin C=\sin C\sin(A+\frac{\pi}{3})$. …………… 1分

因为$0<C<\pi$，所以$\sin C\neq 0$，所以$\sin A=\sin(A+\frac{\pi}{3})$. …………… 2分

因为$\sin(A+\frac{\pi}{3})=\sin A\cos\frac{\pi}{3}+\cos A\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$，…………… 4分

所以$\frac{1}{2}\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$，所以$\tan A=\sqrt{3}$. …………… 6分

因为$0<A<\pi$，所以$A=\frac{\pi}{3}$. …………… 7分

(2)(解法一)因为D是边BC的中点，所以$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，即$2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，…………… 9分

所以$4\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=c^2+bc+b^2$. …………… 10分

因为$b=2,c=3$，所以$4\overrightarrow{AD}^2=3^2+2\times3+2^2=19$，…………… 11分

所以$\overrightarrow{AD}^2=\frac{19}{4}$，则$|\overrightarrow{AD}|=\frac{\sqrt{19}}{2}$. …………… 13分

(解法二)在$\triangle ABC$中，由余弦定理可得$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC=7$，则$BC=\sqrt{7}$. …………… 9分

因为$b=2,c=3,a=BC=\sqrt{7}$，所以$\cos\angle ABC=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$. …………… 10分

因为D是边BC的中点，所以$BD=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{7}}{2}$，…………… 11分

在$\triangle ABD$中，由余弦定理可得$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos\angle ABD=\frac{19}{4}$，则$AD=\frac{\sqrt{19}}{2}$. …………… 13分

16. (1)证明：取棱PB的中点H，连接AH,FH.

因为H,F分别是棱PB,PC的中点，所以$HF\parallel BC,HF=\frac{1}{2}BC$. …………… 1分

因为E是棱AD的中点，所以$AE\parallel BC,AE=\frac{1}{2}BC$，…………… 2分

所以$HF\parallel AE,HF=AE$，…………… 3分

所以四边形 $AEFH$ 为平行四边形，…………………………………………………… 4 分

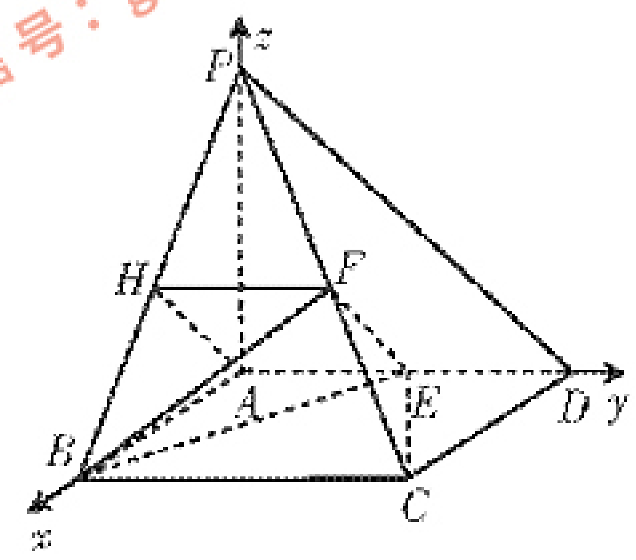
所以 $EF/\!/AH$. ………………………………………………………………………… 5 分

因为 $AH\subset$平面 PAB，$EF\not\subset$平面 PAB，所以 $EF/\!/$平面 PAB. ……………………… 7 分

(2)解：以 A 为坐标原点，分别以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}$的方向为 x,y,z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $AB=2$，则 $B(2,0,0),C(2,4,0),E(0,2,0),F(1,2,2)$，

故$\overrightarrow{BE}=(-2,2,0),\overrightarrow{CE}=(-2,-2,0),\overrightarrow{EF}=(1,0,2)$. ……… 9 分



设平面 BEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=-2x_1+2y_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=x_1+2z_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=2$，得 $\boldsymbol{n}=(2,2,-1)$. … 11 分

设平面 CEF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=-2x_2-2y_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=x_2+2z_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=2$，得 $\boldsymbol{m}=(2,-2,-1)$. ……………………… 13 分

设平面 BEF 与平面 CEF 所成的角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{1}{9}$，即平面 BEF 与平面 CEF 所成角的余弦值为$\dfrac{1}{9}$. …

……………………………………………………………………………………… 15 分

17. 解：(1)记事件 A 为“小李通过第一关”，事件 B 为“小李知道该成语”，

则 $P(A|B)=1,P(A|B)=\dfrac{1}{2},P(B)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，……………………………………… 3 分

由全概率公式可得 $P(A)=P(B)P(A|B)+P(B)P(A|B)=\dfrac{1}{2}\times1+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$. … 6 分

则所求概率为 $P(B|A)=\dfrac{P(BA)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{2}{3}$. …………………………………… 8 分

(2)设事件 A_i 表示小明填了 i 个字，$i=1,2$，C 表示填到的字都是正确的.

X 的可能取值为 $0,5,10$. ……………………………………………………………… 9 分

$P(X=5)=P(A_1C)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，………………………………………………… 10 分

$P(X=10)=P(A_2C)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$，……………………………………………… 11 分

$P(X=0)=1-P(X=5)-P(X=10)=\dfrac{11}{16}$. ……………………………………………… 12 分

随机变量 X 的分布列为

X	0	5	10
P	$\frac{11}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

…………………………………………………………………………………… 13 分

故 $E(X)=0\times\frac{11}{16}+5\times\frac{1}{4}+10\times\frac{1}{16}=\frac{15}{8}$. ………………………………………… 15 分

18. 解：(1) 设 $P(s,n)$，则 $\frac{s^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=1$，故 $n^2=\frac{b^2(a^2-s^2)}{a^2}$. ……………………… 1 分

由题意可知 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，则 $k_{PA}=\frac{n}{s+a}$，$k_{PB}=\frac{n}{s-a}$，…………………………… 2 分

从而 $k_{PA}k_{PB}=\frac{n}{s+a}\cdot\frac{n}{s-a}=\frac{n^2}{s^2-a^2}=\frac{b^2(a^2-s^2)}{a^2(s^2-a^2)}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{4}$. ………………… 4 分

因为 $H(\sqrt{3},\frac{1}{2})$ 在椭圆 C 上，所以 $\frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1$. ………………………………… 5 分

联立 $\begin{cases}-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{4},\\ \frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $a^2=4$，$b^2=1$. ……………………………………… 7 分

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………………………… 8 分

(2) 由题意可知 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则直线 AM 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 BN 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$. ……… 9 分

联立 $\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2),\\ y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2),\end{cases}$ 整理得 $x=-\frac{2y_1(x_2-2)+2y_2(x_1+2)}{y_1(x_2-2)-y_2(x_1+2)}$. ……………………… 10 分

由题意可知直线 l 的斜率不为 0，设直线 l：$x=my+1$，

则 $x=-\frac{2y_1(my_2-1)+2y_2(my_1+3)}{y_1(my_2-1)-y_2(my_1+3)}=\frac{4my_1y_2+6y_2-2y_1}{y_1+3y_2}$. ……………………………… 12 分

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 整理得 $(m^2+4)y^2+2my-3=0$，

则 $y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{3}{m^2+4}$，故 $2my_1y_2=3(y_1+y_2)$. ……………………… 14 分

故 $x=\frac{6y_1+6y_2+6y_2-2y_1}{y_1+3y_2}=\frac{4y_1+12y_2}{y_1+3y_2}=4$. ………………………………………… 16 分

即点 Q 恒在直线 $x=4$ 上. ………………………………………………………………… 17 分

19. 解：(1) 当 $m=-1$ 时，$f(x)=e^x-\ln(x+1)$，此时 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$， …… 1 分

且 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}$，显然 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………… 3 分

因为 $f'(0)=0$，所以当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

则 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………… 5 分

故 $f(x)_{\min}=f(0)=1$. …………………………………………………………………… 6 分

(2)由题意可知 $f(x)$ 的定义域为 $(m,+\infty)$，

因为对定义域内的一切实数 x，都有 $f(x)>4$，所以 $f(m+1)=e^{m+1}>4$，即 $m>\ln 4-1>0$.

因为 m 为整数，所以 $m\geqslant 1$. ………………………………………………………… 8 分

当 $m=1$ 时，由题意可得 $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{(x-1)e^x-1}{x-1}$，显然 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………………………………………………………… 9 分

设 $g(x)=(x-1)e^x-1$，则 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $g(\dfrac{5}{4})=\dfrac{1}{4}e^{\frac{5}{4}}-1<0$，$g(\dfrac{3}{2})=\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}-1>0$， ……………………………… 11 分

所以存在唯一的 $x_0\in(\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{2})$，使得 $f'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0-1}$，即 $\ln(x_0-1)=-x_0$， ……

……………………………………………………………………………………………… 13 分

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{x_0}-\ln(x_0-1)=e^{x_0}+x_0$，$x_0\in(\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{2})$， ……………… 14 分

设 $H(x)=e^x+x$，显然 $H(x)$ 在 $(\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{2})$ 上单调递增， ……………………………… 15 分

则 $H(x)>e^{\frac{5}{4}}+\dfrac{5}{4}>4$ 成立，故 $m=1$ 符合题意， ………………………………… 16 分

即整数 m 的最小值为 1. ……………………………………………………………… 17 分