

2023-2024 学年度第一学期阶段性质量监测（一）

高三年级 数学学科 2023. 11

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。共 150 分，考试时间 120 分钟。第Ⅰ卷 1 至 2 页，第Ⅱ卷 3 至 8 页。

第Ⅰ卷

注意事项：

1. 答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂在答题卡上；
2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号；
3. 本卷共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分。

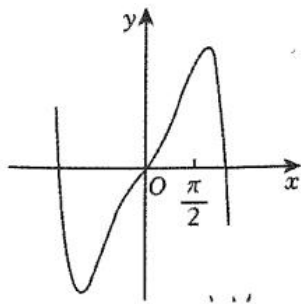
参考公式：

球的表面积公式 $S = 4\pi R^2$ ，其中 R 表示球的半径。

台体的体积公式 $V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h$ ，其中 S' ， S 分别为上、下底面面积， h 为台体高。

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ， $A = \{-1, 1\}$ ， $B = \{-1, 2, 3\}$ ，则 $A \cup (\complement_U B) =$ ()。
A. $\emptyset$ B. $\{1\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$
2. 命题 p 的否定为“ $\exists x \in \mathbf{R}$ ，使得 $x^2 - x + 1 < 0$ ”，则命题 p 为 ()。
A. $\exists x \in \mathbf{R}$ ，使得 $x^2 - x + 1 \geq 0$ B. $\exists x \notin \mathbf{R}$ ，使得 $x^2 - x + 1 < 0$
C. $\forall x \in \mathbf{R}$ ，使得 $x^2 - x + 1 < 0$ D. $\forall x \in \mathbf{R}$ ，使得 $x^2 - x + 1 \geq 0$
3. 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图，则函数 $f(x)$ 的解析式可能为 ()。



- A. $f(x) = (2^x + 2^{-x})\sin x$
- B. $f(x) = (2^x - 2^{-x})\sin x$

C. $f(x) = (2^x + 2^{-x}) \cos x$

D. $f(x) = (2^x - 2^{-x}) \cos x$

4. “ $x^2 < x$ ”的充要条件的是 ().

A. $x < 1$

B. $\frac{1}{x} > 1$

C. $|x^2 - x| = x - x^2$

D. $3^{x^2} > 3^x$

5. 已知 $a = 0.9^{1.3}$, $b = 1.3^{0.9}$, $c = \log_2 3$, 则 ()

A. $a < c < b$

B. $c < a < b$

C. $a < b < c$

D. $c < b < a$

6. 已知函数 $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($x \in [0, \pi]$), 且 $f(x_1) = f(x_2) = \frac{4}{5}$ ($x_1 \neq x_2$), 则 $x_1 + x_2 =$ ()

A. $\frac{5\pi}{6}$

B. $\frac{4\pi}{3}$

C. $\frac{5\pi}{3}$

D. $\frac{2\pi}{3}$

7. 圆台上、下底面的圆周都在一个表面积为 100π 的球面上, 其上、下底面的半径分别为 4 和 5, 则该圆台的体积为 ().

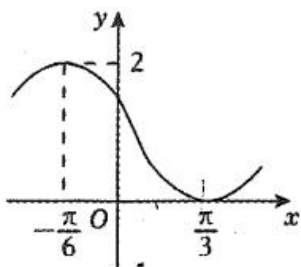
A. 61π

B. $(41 + 2\sqrt{5})\pi$

C. 61

D. 183

8. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ (其中 $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的部分图象如图所示, 则下列结论中:



①函数 $f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 为偶函数;

② $f(x) \geq f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$;

③ $f(x) + f\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 2$;

④曲线 $y = f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{12}$ 处的切线斜率为 -2

所有正确结论的序号是 ()

A. ①②

B. ①③④

C. ③④

D. ②③④

9. 对于任意的实数 $x \in [0, 2]$, 总存在三个不同的实数 y , 使得 $\left(\sqrt{x^4 + 4} + 4\right)y^2 - a(x+2)y^2 - (x+2)e^y = 0$ 成立, 其中 e 为自然对数的底数, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $\left(-\infty, 2 - \frac{e^2}{4}\right)$

B. $\left(2 - \frac{e^2}{4}, \frac{6 + \sqrt{5}}{2}\right)$

C. $\left[\frac{6 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

D. $\left(2 - \frac{e^2}{4}, +\infty\right)$

第II卷

注意事项:

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔答题;

2. 本卷共 11 小题, 共 105 分.

二、填空题: 本大题共 6 个小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

10. 若 $z = 2 - i$ (i 为虚数单位), 则 $\frac{13i}{z \cdot \bar{z} + i} =$ _____.

11. 已知 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

12. 棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别为棱 BB_1, AB 的中点, P 为棱 C_1D_1 上一点, 则三棱锥 $A_1 - PMN$ 的体积为 _____.

13. 已知 $f(3^x) = 3^{x-1} - x \log_5 9$, 则 $f(1) =$ _____, $f(5) =$ _____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 1, AC = 2, \angle A = 120^\circ$, 点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点, 且 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 若 $\overline{BP} = 3\overline{BC}$, 则 $xy =$ _____; 若 $x = 1$, 则 $\overline{BP} \cdot \overline{CP}$ 取得最小值时, 实数 y 的值为 _____.

15. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2|x| + 3 + |x^2 + 2|x| - 3|$, 若方程 $f(x) = 2ax + 3$ 至少有三个不同的实根, 则实数 a 的取值范围是 _____.

三、解答题: 本大题共 5 题, 共 75 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

16. 已知集合 $A = \left\{ y \mid y = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x - \frac{1}{2}, x \in \left[0, \frac{5\pi}{12}\right] \right\}$, $B = \{x \mid x^2 - (2m+1)x + 2m < 0\}$.

(1) 若 $m = -1$, 求 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B)$;

(2) 若 $B \subseteq A$, 求实数 m 的取值范围.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知

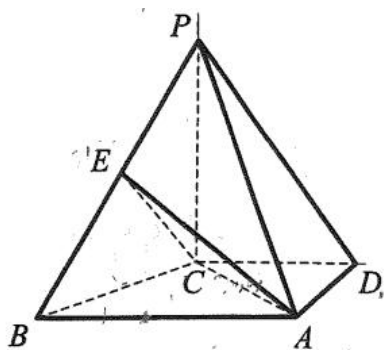
$$(b^2 + c^2 - a^2) \sin A = (a^2 + c^2 - b^2) \sin B, c = 3, \cos C = \frac{1}{4}.$$

(1) 证明: $A = B$;

(2) 求 a ;

(3) 求 $\cos 3B$ 的值.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PC \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \parallel CD, CD \perp AD, PC = AB = 2CD = 2, BC = \sqrt{2}$, E 是棱 PB 上一点.



(1) 求证: 平面 $EAC \perp$ 平面 PBC ;

(2) 若 E 是 PB 的中点,

(i) 求直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值.

(ii) 求平面 PDC 和平面 EAC 的夹角的余弦值.

19. 设函数 $f(x) = \frac{a^{2x} - b}{a^x}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 且 $y = f(x)$ 的图象过点 $(1, \frac{3}{2})$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 设 $g(x) = (x-p)(x-q)^2, p < q$, 若 $\forall x \in \mathbf{R}, f(-g(x)) + f(mxg'(x)) \leq 0$ ($g'(x)$ 为函数 $g(x)$ 的导数),

试写出符合上述条件的函数 $g(x)$ 的一个解析式, 并说明你的理由.

20. 已知函数 $f(x) = ax \ln x + x^2, a \in \mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线斜率为 1, 求 a 的值;

(2) 讨论 $f(x)$ 的零点个数;

(3) 若 $x \in (1, +\infty)$ 时, 不等式 $f(x) + \frac{x}{e^x} > x^{a+1}$ 恒成立, 求 a 的最小值.