12 月数学测试参考答案

1—8：BDCB　　BCAD

9—12：　9. AD，　10. ABD，　11. ACD，　12. ABD

13. $\frac{1}{2}$； **14.** $\frac{8\pi}{3}$； **15.** -3π； **16.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$；

17. （1）由题设及正弦定理得 $\sin A\sin\frac{A+C}{2}=\sin B\sin A$.

因为 $\sin A\neq 0$，所以 $\sin\frac{A+C}{2}=\sin B$.

由 $A+B+C=180°$，可得 $\sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2}$，故 $\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$.

因为 $\cos\frac{B}{2}\neq 0$，故 $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$，因此 $B=60°$. ……………………………………5 分

（2）因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，…………6 分

设∠ABC 的角平分线交 AC 于 D，因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}$，

所以 $\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times BD\times\sin 30^{\circ}+\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times BD\times\sin 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $BD=\frac{6}{5}$.………10 分

18. (1)记 A＝“至少有一人进入面试”，由已知得 $\mu=70$，$\sigma=5$，

所以 $P(\xi\le 75)=\frac{1+P(|X-\mu|\le\sigma)}{2}\approx\frac{1+0.6827}{2}=0.84135$，

则 $P(A)=1-0.84135^4\approx 0.499$

即这 4 人中至少有一人进入面试的概率为 0.499. ……………………………………5 分

(2)X 的可能取值为 0，1，2，3，

$P(X=0)=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{2}{3})(1-\frac{1}{4})=\frac{1}{8}$，

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$，

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$，

$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$，

则随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	1/8	5/12	3/8	1/12

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{12}=\frac{17}{12}$.……………………………………12 分

19. （1）证明：∵ $PA\perp$平面$ABCD$，$BC\subset$平面$ABCD$，∴ $PA\perp BC$.

又∵ $AB\perp BC$，$PA\cap AB=A$，PA，$AB\subset$平面PAB，∴ $BC\perp$平面PAB，

又∵ $BC\subset$平面PBC，∴平面$PAB\perp$平面PBC；……………………………………4 分

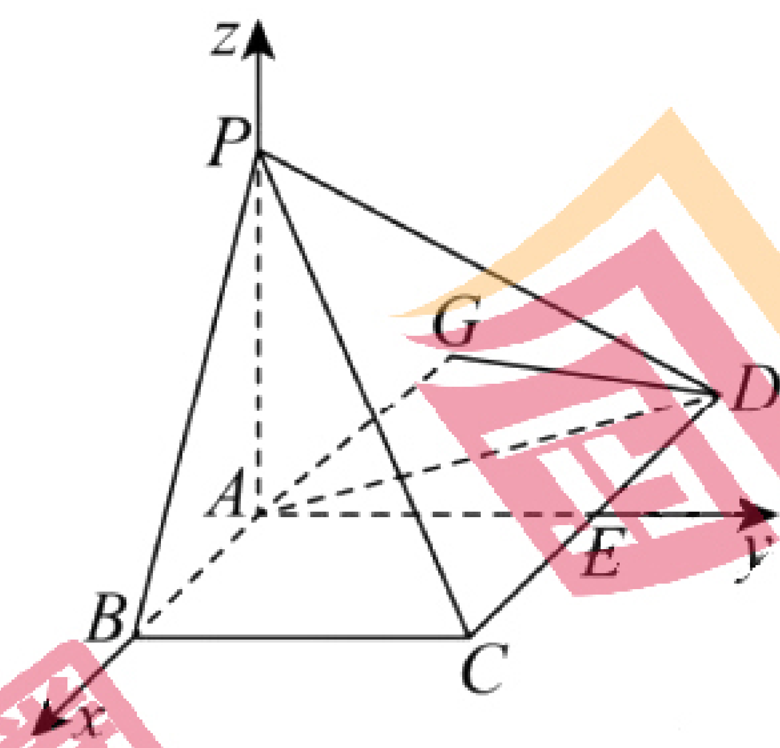
（2）取 CD 中点为 E，连接 AE，

因为$AB\perp BC$，$AB\parallel CD$，$AB=BC=1$，$CD=2$，

则$AB\parallel CE, AB=CE$，即四边形$ABCE$为矩形，故$AB\perp AE$，

又$PA\perp$平面$ABCD$，$AB,AE\subset$平面$ABCD$，则可得AB,AE,AP两两垂直，

故以 A 为坐标原点，以AB,AE,AP所在直线为x,y,z轴，建立空间直角坐标系，



设$PA=m>0$，$\therefore A(0,0,0)$，$P(0,0,m)$，$C(1,1,0)$，$D(-1,1,0)$，$B(1,0,0)$，

易证$PC=PD$，又$\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$，所以点$G$是$\triangle PCD$的重心，

$\therefore G\left(0,\frac{2}{3},\frac{m}{3}\right)$，$\overrightarrow{DG}=\left(1,-\frac{1}{3},\frac{m}{3}\right)$，

又$\overrightarrow{PB}=(1,0,-m)$，$\overrightarrow{BC}=(0,1,0)$，设平面$PBC$的一个法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x-mz=0\\ y=0\end{cases}$，取$\vec{n}=(m,0,1)$，……………………6 分

设DG与平面PBC所成角为θ，$0^\circ\le\theta\le 90^\circ$，

$\therefore \sin\theta=\frac{|\overrightarrow{DG}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{DG}||\vec{n}|}=\frac{\left|\frac{4m}{3}\right|}{\sqrt{\frac{10+m^2}{9}}\sqrt{m^2+1}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，……………………8 分

化简得，$m^4-7m^2+10=0$，

解得$m^2=2$ 或 5，$\therefore m=\sqrt{2}$或$\sqrt{5}$，即PA的长度为$\sqrt{2}$或$\sqrt{5}$. ……………………12 分

20.（1）因为 $a_{n+1}a_n=2^{n+1}$，$a_1=1$，所以 $a_2=4$，$a_n>0$，

所以 $b_n=a_{2n-1}+a_{2n}>0$.

因为 $a_{2n+2}\cdot a_{2n+1}=2^{2n+2}$，$a_{2n+1}a_{2n}=2^{2n+1}$，所以 $\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}=2$；

因为 $a_{2n+1}a_{2n}=2^{2n+1}$，$a_{2n}a_{2n-1}=2^{2n}$，所以 $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}=2$，

所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{2n+1}+a_{2n+2}}{a_{2n-1}+a_{2n}}=2$，

所以 $\{b_n\}$ 是以 5 为首项，2 为公比的等比数列. ……………………6 分

（2）由（1）可得 $b_n=5\cdot 2^{n-1}$，

因为 $c_n=\frac{b_n}{(b_{n+1}-3)(b_n-3)}=\frac{1}{b_n-3}-\frac{1}{b_{n+1}-3}$，

所以 $S_n=\dfrac{1}{b_1-3}-\dfrac{1}{b_{n+1}-3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5\times 2^n-3}<\dfrac{1}{2}$ 得证. ……………………………12 分

21．（1）设曲线 C 上任一点的坐标为 (x,y)，圆 $x^2+y^2=1$ 上的对应点的坐标为 (x',y')，

由题意可得 $\begin{cases} x'=\dfrac{1}{5}x, \\ y'=\dfrac{1}{4}y, \end{cases}$，因为 $(x')^2+(y')^2=1$，所以曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$；…………4 分

（2）连接 BE 交 x 轴于点 G．

直线 $BM:y=-\dfrac{4}{t}x+4$，联立 $\begin{cases} y=-\dfrac{4}{t}x+4, \\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1, \end{cases}$ 解得点 $D(\dfrac{50t}{t^2+25},\dfrac{4t^2-100}{t^2+25})$，

因为 D,E 关于 x 轴对称，所以 $E(\dfrac{50t}{t^2+25},\dfrac{-4t^2+100}{t^2+25})$，………6 分

所以直线 $BE:y=-\dfrac{4t}{25}x+4$，所以 $G(\dfrac{25}{t},0)$，

$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ABG}-S_{\triangle AEG}=\dfrac{1}{2}\times|AG|\times|y_B-y_E|=\dfrac{1}{2}\times(-5-\dfrac{25}{t})\times(4+\dfrac{4t^2-100}{t^2+25})=\dfrac{-20(t^2+5t)}{t^2+25}$，

$S_{\triangle AEM}=\dfrac{1}{2}\times|AM|\times|y_E|=\dfrac{1}{2}\times(t+5)\times\dfrac{-4t^2+100}{t^2+25}=\dfrac{-2t^2+50}{t^2+25}\times(t+5)$，

所以 $\dfrac{S_{\triangle AEM}}{S_{\triangle AEB}}=\dfrac{\dfrac{-2t^2+50}{t^2+25}\times(t+5)}{\dfrac{-20(t^2+5t)}{t^2+25}}=\dfrac{(-2t^2+50)\times(t+5)}{-20(t^2+5t)}=\dfrac{(-t^2+25)}{-10t}=\dfrac{1}{10}(t-\dfrac{25}{t})$，………10 分

因为 $-4\leqslant t\leqslant -1$，所以 $\dfrac{S_{\triangle AEM}}{S_{\triangle AEB}}=\dfrac{1}{10}(t-\dfrac{25}{t})\in[\dfrac{9}{40},\dfrac{12}{5}]$．……………………………12 分

法二：（转化为 M 到 AE 的距离与 B 到 AE 距离之比）

22．（1）$h(x)=\ln x+|x-a|$，因为 $a>0$，

所以 $h(x)=\begin{cases}\ln x+x-a, & x\geq a, \\ \ln x-x+a, & 0<x<a.\end{cases}$

①当 $x\geq a$ 时，$h(x)=\ln x+x-a$，$h'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$ 恒成立，此时 $h(x)$在$(a，+\infty)$上单调递增；

②当 $0<x<a$ 时，$h(x)=\ln x-x+a$，$h'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$．

当 $0<a\leq 1$ 时，$h'(x)>0$ 恒成立，此时 $h(x)$在$(0，a)$上单调递增；

当 $a>1$ 时，当 $0<x<1$ 时 $h'(x)>0$，当 $1\leq x<a$ 时 $h'(x)\leq 0$，

此时 $h(x)$在$(0，1)$上单调递增，在$(1，a)$上单调递减．

综上，当 $a\leq 1$ 时，$h(x)$的增区间为$(0，+\infty)$，无减区间；

当 $a>1$ 时，$h(x)$增区间为$(0，1)$，$(a，+\infty)$；减区间为$(1，a)$．………………4 分

（2）不等式$(x^2-1)f(x)\geq k(x-1)^2$对一切正实数x恒成立，

即$(x^2-1)\ln x\geq k(x-1)^2$对一切正实数$x$恒成立.

当$0<x<1$时，$x^2-1<0$；$\ln x<0$，则$(x^2-1)\ln x>0$；

当$x\geq 1$时，$x^2-1\geq 0$；$\ln x\geq 0$，则$(x^2-1)\ln x\geq 0$.

因此当$x>0$时，$(x^2-1)\ln x\geq 0$恒成立.

又当$k\leq 0$时，$k(x-1)^2\leq 0$，故当$k\leq 0$时，$(x^2-1)\ln x\geq k(x-1)^2$恒成立.

下面讨论$k>0$的情形.

当$x>0$且$x\neq 1$时，$(x^2-1)\ln x-k(x-1)^2=(x^2-1)[\ln x-\dfrac{k(x-1)}{x+1}]$.

设$h(x)=\ln x-\dfrac{k(x-1)}{x+1}(x>0$且$x\neq 1)$，$h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2k}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2(1-k)x+1}{x(x+1)^2}$. …………6分

记$\triangle=4(1-k)^2-4=4(k^2-2k)$.

①当$\triangle\leq 0$，即$0<k\leq 2$时，$h'(x)\geq 0$恒成立，故$h(x)$在$(0，1)$及$(1，+\infty)$上单调递增.

于是当$0<x<1$时，$h(x)<h(1)=0$，又$x^2-1<0$，故$(x^2-1)h(x)>0$，即$(x^2-1)\ln x>k(x-1)^2$.

当$x>1$时，$h(x)>h(1)=0$，又$x^2-1>0$，故$(x^2-1)h(x)>0$，即$(x^2-1)\ln x>k(x-1)^2$.

又当$x=1$时，$(x^2-1)\ln x=k(x-1)^2$.

因此当$0<k\leq 2$时，$(x^2-1)\ln x\geq k(x-1)^2$对一切正实数$x$恒成立. …………9分

②当$\triangle>0$，即$k>2$时，设$x^2+2(1-k)x+1=0$的两个不等实根分别为x_1，$x_2(x_1<x_2)$.

函数$\varphi(x)=x^2+2(1-k)x+1$图像的对称轴为$x=k-1>1$，

又$\varphi(1)=4-2k<0$，于是$x_1<1<k-1<x_2$.

故当$x\in(1，k-1)$时，$\varphi(x)<0$，即$h'(x)<0$，从而$h(x)$在$(1，k-1)$在单调递减；

而当$x\in(1，k-1)$时，$h(x)<h(1)=0$，此时$x^2-1>0$，于是$(x^2-1)h(x)<0$，即$(x^2-1)\ln x<k(x-1)^2$，

因此当$k>2$时，$(x^2-1)\ln x\geq k(x-1)^2$对一切正实数$x$不恒成立.

综上，当$(x^2-1)f(x)\geq k(x-1)^2$对一切正实数x恒成立时，$k\leq 2$，即k的取值范围是$(-\infty，2]$.

………………………………12分