淮安市高中校协作体２０２３～２０２４学年度第一学期高三年级期中联考
数学试卷参考答案

考试时间：120 分钟　　总分：150 分　　命题人：

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的）

1．已知集合$A=\{x|-1\le x\le 2\}$，$B=\{x|x^2-3x-4<0,x\in Z\}$，则$A\cap B=$（ C ）

A．$\{0,1\}$　B．$\{x|-1\le x<1\}$　C．$\{0,1,2\}$　D．$\{x|-1<x\le 2\}$

2．如果 x， y 是实数，那么“x=y”是“cos x = cos y ”的（ A ）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件

C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

3．已知函数$f(x)=3f'(1)x-x^2+\ln x+\frac{1}{2}$（$f'(x)$是$f(x)$的导函数），则$f'(1)=$（ C ）

A．1　B．2　C．$\frac{1}{2}$　D．$-\frac{1}{2}$

4．已知$f(x)=e^x$，若$a>0,b>0$，且$f(a)\cdot f(2b)=e^2$，则$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$的最小值为（ B ）

A． 9　B．$\frac{9}{2}$　C． 3　D．1

5．已知$\sin\alpha=2\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$，则$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$（ D ）

A．$\frac{1}{3}$　B．3　C．$-\frac{1}{3}$　D．-3

6．我国古代数学家刘徽在《九章算术注》中提出割圆术：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣”，即通过圆内接正多边形细割圆，并使正多边形的面积无限接近圆的面积，进而来求得较为精确的圆周率.如果用圆的内接正n边形逼近圆，算得圆周率的近似值记为π_n，那么用圆的内接正2n边形逼近圆，算得圆周率的近似值π_{2n}可表示成（ D ）

A．$\frac{\pi_n}{\sin\frac{360°}{n}}$　B．$\frac{\pi_n}{\cos\frac{360°}{n}}$　C．$\frac{\pi_n}{\sin\frac{180°}{n}}$　D．$\frac{\pi_n}{\cos\frac{180°}{n}}$

7．已知数列$\{a_n\}$是正项等比数列，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\log_2 a_n$.若$a_2a_5a_8=2^9$，则$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_9=$（ B ）

A．24　B．27　C．36　D．40

8．若函数$f(x)$为定义在R上的偶函数，当$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<2x$，则不等式$f(3x-1)-f(2)>(3x-3)(3x+1)$的解集为（ A ）

A．$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$　B．$\left(-\frac{1}{3},1\right)$　C．$(1,+\infty)$　D．$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$

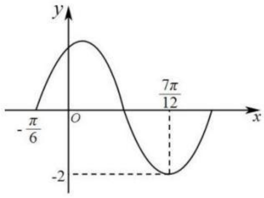
二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分）

9．已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中$A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的部分图象如图所

示，则（ A B C ）

A．$f(x)$的最小正周期为π　　　　B．$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{12}$对称

C．$f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$　　　　D．$\frac{\pi}{6}$是$f(x)$的一个零点



10．已知$\log_2 a>\log_2 b>1$，则下列不等式恒成立的是（ A B D ）

A．$2^a>2^b$　　　　B．$a^2>b^2$

C．$a\ln b>b\ln a$　　　　D．$\frac{1}{a}-b>\frac{1}{b}-a$

11．在数列$\{a_n\}$中，如果对任意$n\in N^*$都有$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=k$（k为常数），则称$\{a_n\}$为等差比数列，k称为公差比.下列说法正确的是（ B C ）

A．等比数列一定是等差比数列

B．等差比数列的公差比一定不为0

C．若$a_n=-3^n+2$，则数列$\{a_n\}$是等差比数列

D．若等差数列是等差比数列，则其公差比可能为2

12．已知函数$f(x)=\log_4(1+4^x)-\frac{1}{2}x$，则下列说法中正确的是（ A C D ）

A．函数$f(x)$的图象关于y轴对称　　　　B．函数$f(x)$的图象关于原点对称

C．函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上是增函数　　　　D．函数$f(x)$的值域为$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共计20分．其中第16题共有2空，第一个空2分，第二个空3分；其余题均为一空，每空5分．请把答案填写在答题卡相应位置上）

13．“$\forall x\in R, x^2-2x-a\geq 0$”为真命题，则实数a的最大值为____－1____.

14．已知△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$a=6$，$b=5$，$c=4$，则BC边上的中线AD的长为____$\frac{\sqrt{46}}{2}$____.

15．已知函数$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x-t)$的定义域是$(m,m+8)$，则函数$f(x)$的单调增区间为____（1，5）或［1，5）____.

16．已知函数$f(x)=\begin{cases}e^x, x\leq 0\\ \frac{1}{2}|x-2|, x>0\end{cases}$，则不等式$f(x)\leq 1$的解集为____$(-\infty,4]$____，若实数a，b，c满足$f(a)=f(b)=f(c)$且$a<b<c$，则$a+2b+c$的取值范围是____$(-\infty,5-\ln 2]$____.

四、解答题（本大题共6小题，共计70分．请在答题卡指定区域内作答．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本题满分10分）

在△ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$2c\cdot\cos C=b\cdot\cos A+a\cdot\cos B$.

(1)求角C；　　　　(2)若$a=6$，$\cos A=-\frac{4}{5}$，求c.

解：（1）在△ABC中，由正弦定理及条件得：

$2\sin C\cos C=\sin B\cos A+\sin A\cos B$

即 $2\sin C\cos C=\sin(B+A)=\sin C$......... 2分

∵ C 为 $\triangle ABC$ 的内角，

∴ $\sin C>0$

∴ $2\cos C=1$，$\cos C=\frac{1}{2}$， 4分

又 $0<C<\pi$

∴ $C=\frac{\pi}{3}$；......... 5分

（2）由（1）知：$C=\frac{\pi}{3}$，

∵ $\cos A=-\frac{4}{5}$，且 $0<A<\pi$，

∴ $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$，......... 7分

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，且 $a=6$，

∴ $\frac{6}{\frac{3}{5}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$， 9分

∴ $c=\frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{5}}=5\sqrt{3}$ 10分

18.（本题满分 12 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_4=-2$，$S_{10}=25$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式； (2)求 S_n 的最小值及取得最小值时 n 的值.

解：（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

由 $a_4=-2$，$S_{10}=25$，得 $a_1+3d=-2$，$10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=25$，......... 2分

解得 $a_1=-11$，$d=3$， 4分

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=3n-14$......... 6分

（2）方法一：由 $d=3$ 知 $\{a_n\}$ 是递增数列，

当 $n\le 4$ 时，$a_n<0$；当 $n\ge 5$ 时，$a_n>0$ 8分

所以 $S_1>S_2>S_3>S_4<S_5<\cdots$， 10分

所以当 $n=4$ 时，S_n 最小，......... 11分

最小值为 $S_4=4a_1+\frac{4\times 3}{2}\times d=-26$......... 12分

方法二：$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{3}{2}n^2-\frac{25}{2}n=\frac{3}{2}\left(n-\frac{25}{6}\right)^2-\frac{625}{24}$，......... 8分

又函数 $y=\frac{3}{2}\left(x-\frac{25}{6}\right)^2-\frac{625}{24}$ 的对称轴为 $x=\frac{25}{6}$，且开口向上......... 10分

但$n\in\mathbf{N}^*$，所以当$n=4$时，S_n最小，......... 1 1分

最小值为-26. .... 1 2分

19.（本题满分 12 分）

已知不等式$\log_2(x+2)\le\log_2(8-2x)$.

（1）求不等式的解集A；

（2）若当$x\in A$时，不等式 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2\ge m$总成立，求m的取值范围.

解：（1）由已知可得：$\begin{cases}x+2>0\\x+2\le 8-2x\end{cases}$ 3分

$\Rightarrow -2<x\le 2$，

因此，原不等式的解集为$A=(-2,2]$； 5分

（2）令$f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}-4\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2$，则原问题等价$f(x)_{\min}\ge m$，......... 6分

且$f(x)=4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2$，$x\in A=(-2,2)$，......... 8分

令$t=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\in\left[\frac{1}{4},4\right)$，

可得$y=f(x)=4t^2-4t+2=4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1$，$t\in\left[\frac{1}{4},4\right)$ 1 0分

当$t=\frac{1}{2}$时，即当$x=1$时，函数$y=f(x)$取得最小值，即$f(x)_{\min}=f(1)=1$，..... 1 1分

$\therefore m\le 1$. 1 2分

20. （本题满分 12 分）

设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_1=1$，__________.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=\frac{3}{2S_n+7n}$，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，证明：$T_n<\frac{3}{4}$.

从下列两个条件中任选一个作为已知，补充在上面问题的横线中进行求解（若两个都选，则按所写的第 1 个评分）：

① 数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以$\frac{3}{2}$为公差的等差数列；　②$2na_{n+1}=2S_n+3n(n+1)$

解：（1）若选择①数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以$\frac{3}{2}$为公差的等差数列，显然其首项为1

故$\frac{S_n}{n}=\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}$，故$S_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$；........ 2分

当$n\ge 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)=3n-2$，........ 4分

当$n=1$时，$a_1=S_1=1$，满足$a_n=3n-2$.

故$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n-2$；........ 6分

（注：没有验证 n = 1 的情况，扣 1 分）

若选择② $2na_{n+1}=2S_n+3n(n+1)$

即 $2n(S_{n+1}-S_n)=2S_n+3n(n+1)$，

整理得：$nS_{n+1}-(n+1)S_n=\frac{3}{2}n(n+1)$

故 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{3}{2}$，　　........ 2分

即数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是首项为1，公差为$\frac{3}{2}$的等差数列，

故 $\frac{S_n}{n}=\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}$，故 $S_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$；........ 4分

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)=3n-2$

当$n=1$时，$a_1=S_1=1$，满足$a_n=3n-2$.

故$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n-2$；........ 6分

（注：没有验证 n = 1 的情况，扣 1 分）

（2）根据（1）中所求可得：$S_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$，

则 $b_n=\frac{3}{2S_n+7n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$........ 8分

故 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$........ 1 0分

又 $\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}>0$，

故可得 $T_n<\frac{3}{4}$......... 1 2分

21.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\sin x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sqrt{3}\cos^2 x-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求函数f(x)的最小正周期及f(x)图象的对称轴；

(2)在锐角△ABC中，若f(A) = 0，且能盖住△ABC的最小圆的面积为 4 π，求AB + AC 的取值范围.

5

解：(1)因为

$f(x)=\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x+\sqrt{3}\times\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，........ 2分

所以函数$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，........ 3分

令$2x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k\in Z$），解得$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$（$k\in Z$），

所以对称轴方程是直线$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$（$k\in Z$）；....... 5分

(2)因为$f(A)=0$，所以$\sin\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)=0$，

又因为$\triangle ABC$为锐角三角形，所以$0<A<\frac{\pi}{2}$，$2A+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4}{3}\pi\right)$，

所以$2A+\frac{\pi}{3}=\pi$，所以$A=\frac{\pi}{3}$，　　　　　　........ 7分

因为能盖住$\triangle ABC$的最小圆为$\triangle ABC$的外接圆，设半径为R，

所以$\pi R^2=4\pi$，得$R=2$，

因为由正弦定理有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R=4$

所以$b=4\sin B$，$c=4\sin C$，

$$b+c=4\sin B+4\sin C=4\sin B+4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=6\sin B+2\sqrt{3}\cos B=$$

$4\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$，　　　　　　........ 9分

因为$\triangle ABC$为锐角三角形，所以$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，

所以$\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，则$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\le 1$，........ 11分

所以$6<b+c\le 4\sqrt{3}$，

所以$AB+AC$的取值范围是$(6,4\sqrt{3}]$. 12分

22.（本题满分12分）

已知函数$f(x)=x^3-ax-b$.

（1）讨论$f(x)$在$[0,1]$上的单调性；

（2）若$a>0$，过点(a,b)可作曲线$f(x)$的3条切线，求证：$-\frac{a^2}{2}<b<f(a)$.

解：（1）由题意得$f'(x)=3x^2-a$.

当$x\in[0,1]$时，$3x^2\in[0,3]$.

① 若$a\le 0$，则对任意$x\in[0,1]$，$f'(x)\ge 0$恒成立，

$\therefore f(x)$在$[0,1]$上单调递增；　　　　........ 1分

② 若$a\ge 3$，则对任意$x\in[0,1]$，$f'(x)\le 0$恒成立，

$\therefore f(x)$在$[0,1]$上单调递减；　　　　....... 2分

③若$0<a<3$，则 $f'(x)=3\left(x+\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$，

当$x\in\left[0,\sqrt{\frac{a}{3}}\right]$时$f'(x)\le 0$，当$x\in\left[\sqrt{\frac{a}{3}},1\right]$时，$f'(x)\ge 0$，

$\therefore f(x)$在$\left[0,\sqrt{\frac{a}{3}}\right]$上单调递减，在$\left[\sqrt{\frac{a}{3}},1\right]$上单调递增. 4分

综上，当$a\le 0$时，$f(x)$在$[0,1]$上单调递增；

当$a\ge 3$时，$f(x)$在$[0,1]$上单调递减；

当$0<a<3$时，$f(x)$在$\left[0,\sqrt{\frac{a}{3}}\right]$上单调递减，在$\left[\sqrt{\frac{a}{3}},1\right]$上单调递增. 5分

（2）设切点为$\left(x_0,x_0^3-ax_0-b\right)$，则$f'(x_0)=3x_0^2-a$，

∴切线方程为$y-\left(x_0^3-ax_0-b\right)=\left(3x_0^2-a\right)(x-x_0)$.

将(a,b)代入上式，整理得$2x_0^3-3ax_0^2+a^2+2b=0$. 7分

构造函数$g(x)=2x^3-3ax^2+a^2+2b$，........ 8分

则$g'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$，

当$x\in(-\infty,0)\cup(a,+\infty)$时，$g'(x)>0$，当$x\in(0,a)$时，$g'(x)<0$，

$\therefore g(x)$在$(-\infty,0)$和$(a,+\infty)$上单调递增，在$(0,a)$上单调递减. 1 0分

由题可知函数$g(x)$有3个不同的零点，

$\therefore g(0)=a^2+2b>0$，

$g(a)=a^2+2b-a^3=b-\left(a^3-a^2-b\right)=b-f(a)<0$，........ 1 1分

$\therefore -\frac{a^2}{2}<b<f(a)$. 1 2分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。