

南昌市三校（一中、十中、铁一中）高三上学期第一次联考

数学试卷参考答案

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 【答案】C

【解析】 $z = \frac{2-i}{1+2i} = \frac{(2-i)(1-2i)}{5} = -i$ ，所以 $|z|=1$.

2. 【答案】B

解析：由 $A = \{x | y = \sqrt{3-2x}\}$ ，得到 $x \leq \frac{3}{2}$ ，即 $A = \{x | x \leq \frac{3}{2}\}$ ，由 $2^x > 1 \Rightarrow x > 0$

即 $B = \{x | x > 0\}$ ，则 $A \cap B = \{x | 0 < x \leq \frac{3}{2}\}$.

3. 【答案】C

【解析】 $S_{17} = \frac{(a_1 + a_{17}) \times 17}{2} = \frac{2a_9}{2} \times 17 = 255 \Rightarrow a_9 = 15$ ，

故公差 $d = a_{10} - a_9 = 20 - 15 = 5$.

答案：C.

4. 【答案】A

【解析】 $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

$\therefore \lambda = \frac{1}{4}$ ， $\mu = -\frac{3}{4}$ ， $\lambda + \mu = -\frac{1}{2}$.

5. 【答案】B

【解析】因为 $\{a_n\}$ 是等比数列， $a_1 > 0$ ，所以

$2S_8 < S_7 + S_9 \Leftrightarrow a_8 < a_9 \Leftrightarrow q^7 < q^8 \Leftrightarrow q^7(q-1) > 0 \Leftrightarrow q < 0$ 或 $q > 1$ ，

$\{a_n\}$ 为递增数列 $\Leftrightarrow q > 1$ ，所以是必要不充分条件.

6. 【答案】B

【解析】 $2^{\frac{1}{3}} < 2^{\frac{1}{2}} < \frac{3}{2}$ ， $3\log_3 2 = \frac{3}{2}\log_3 4 > \frac{3}{2}$ ， $3\log_3 2 = \log_3 8 < \log_3 9 = 2$ ， $\log_2 6 > \log_2 4 = 2$ ，

所以 $2^{\frac{1}{3}} < 3\log_3 2 < \log_2 6$.

7. 【答案】D

【解析】在 $\triangle BCD$ 中， $\angle DCB = 135^\circ \Rightarrow BD^2 = 1+1+2 \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2}$ ，

$$\text{在 } \triangle BAD \text{ 中, } \cos \angle BAD = \frac{3+1-2-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}.$$

8. 【答案】A

$$\text{【解析】 } f(2-x)+f(x)=\log_3(1+x)-\log_3(3-x)-(2-x)+3+\log_3(3-x)-\log_3(1+x)-x+3=4$$

因此函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,2)$ 成中心对称, $f(0)=4$, $f(2)=0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减,

因此与坐标轴围成图形的面积是 $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$.

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 【答案】ACD

【解析】因为 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-2) + 4 \times 1 = 0$, 所以 A 正确, B 不正确;

$\vec{a} + \vec{b} = (0, 5)$, 所以 $|\vec{a} + \vec{b}| = 5$, C 正确;

$\vec{a} - \vec{b} = (4, 3)$, 所以 $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$, D 正确.

10. 【答案】AD

11. 【答案】BCD

【解析】由对称性知道, $\frac{T}{2} = \frac{3\pi}{2}$, 因此 $T = 3\pi$, A 不正确;

$\frac{2\pi}{\omega} = 3\pi \Rightarrow \omega = \frac{2}{3}$, 又 $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, 结合图象, 可以取 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 即 $f(x) = 2 \sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$, 因此

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2 \geq f(x)$, 因此 B 正确;

当 $x \in [0, 5\pi]$ 时, $\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{21\pi}{6}\right]$, 有三个零点, 因此 C 正确;

$f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin \frac{2}{3}x$ 是奇函数, 因此 D 正确.

12. 【答案】ABD

【解析】A. $x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nm} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \cdot n = \frac{2^n + 2^{n+1}}{2} \cdot n = 3n \cdot 2^{n-1}$;

B. a_{10} 在数列 $\{b_n\}$ 中是第 $10 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 55$ 项, 所以 $a_{10} = b_{55}$;

C. $a_{11} = b_{66} \Rightarrow b_{72} = \frac{a_{11} + a_{12}}{2} = \frac{2^{11} + 2^{12}}{2} = 3072$;

$$\begin{aligned} D. S_{55} &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}) + [x_{11} + (x_{21} + x_{22}) + \cdots + (x_{91} + x_{92} + \cdots + x_{99})] \\ &= (2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}) + 3(1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + \cdots + 9 \times 2^8) \\ &= (2^{11} - 2) + 3(8 \times 2^9 + 1) = 14337. \end{aligned}$$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 【答案】 $\frac{11}{2}$

【解析】 $\log_2 3 \cdot \log_3 4 + \log_4 8 + 5^{\log_5 2} = \frac{\lg 3}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 2^2}{\lg 3} + \frac{\lg 2^3}{\lg 2^2} + 2$
 $= \frac{\lg 3}{\lg 2} \cdot \frac{2 \lg 2}{\lg 3} + \frac{3 \lg 2}{2 \lg 2} + 2 = 2 + \frac{3}{2} + 2 = \frac{11}{2}$, 故答案为: $\frac{11}{2}$.

14. 【答案】 $\frac{7}{6}$

【解析】 因为 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $2 \cos \theta - 6 \sin \theta = 0$, 即 $\tan \theta = \frac{1}{3}$,
 则 $\frac{2 \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta + 3 \sin \theta} = \frac{2 + \tan \theta}{1 + 3 \tan \theta} = \frac{2 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{7}{6}$.

15. 【答案】 $8\sqrt{3}$

【解析】 设 AB 与垂线的夹角为 θ , 则

$$AB = \frac{2}{\cos \theta}, \quad AC = \frac{4}{\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)},$$

$$\text{所以面积 } S = \frac{2\sqrt{3}}{\cos \theta \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sin 2\theta - \cos 2\theta - 1} = \frac{8\sqrt{3}}{2 \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) - 1},$$

所以当 $2\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时, 面积最小, 最小值是 $8\sqrt{3}$.

16. 【答案】 $(0, e^{-2})$

【解析】 依题意 $f'(x) = ae^{ax+1} - \ln x + 2 - 1 < 0$ 有解, 即 $e^{ax+1+\ln a} < \ln x - 1$,

即 $ax + 1 + \ln a + e^{ax+1+\ln a} < \ln x + ax + \ln a$, 即 $ax + 1 + \ln a + e^{ax+1+\ln a} < \ln(ax) + e^{\ln(ax)}$ 有解,

构造函数 $g(t) = t + e^t$, 单调递增,

因此不等式转化为 $ax + 1 + \ln a < \ln(ax)$, 即 $a < \frac{\ln x - 1}{x}$ 有解,

$$\text{记 } h(x) = \frac{\ln x - 1}{x}, \quad h'(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow x = e^2,$$

从而求得 $h(x) \in (-\infty, e^{-2}]$, 因此 $0 < a < e^{-2}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 【解析】(1) 第 n 行所有数的和为

$$a_n = \frac{1+2+3+\cdots+2^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{\frac{(1+2^{n-1})2^{n-1}}{2}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} + 2^{n-2};$$

(2) 前 10 行所有数的和为

$$S_{10} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = \frac{10}{2} + (2^{-1} + 2^0 + \cdots + 2^8),$$

$$\text{即 } S_{10} = 5 + \frac{\frac{1}{2}(1-2^{10})}{1-2} = \frac{10+2^{10}-1}{2} = \frac{1033}{2}.$$

$$18. \text{【解析】(1) 由余弦定理得: } BC^2 = 3^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 3 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5.$$

$$\text{所以 } BC = \sqrt{5}, \text{ 因此 } 2r = \frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{10},$$

$$\text{所以外接圆的面积为 } S = \pi \left(\frac{\sqrt{10}}{2} \right)^2 = \frac{5\pi}{2};$$

(2) 设 BC 的中点为 E , 则 $\overrightarrow{EO} \perp \overrightarrow{BC}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EO}) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EO} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{5}{2}.$$

$$19. \text{【解析】(1) } f(x) = 2\sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x - 2 \cos^2 \omega x$$

$$= \sqrt{3} \sin 2\omega x - \cos 2\omega x - 1 = 2 \sin \left(2\omega x - \frac{\pi}{6} \right) - 1,$$

$$\text{所以 } \frac{2\pi}{2\omega} = 6\pi \Rightarrow \omega = \frac{1}{6};$$

$$(2) f(3\alpha) = -\frac{3}{13} \Rightarrow 2 \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{10}{13} \Rightarrow \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{5}{13}$$

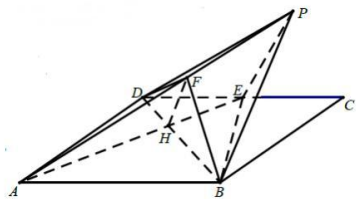
$$\text{又 } \alpha - \frac{\pi}{6} \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \text{ 所以 } \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{12}{13},$$

$$f(3\beta+3\pi)=-\frac{11}{5} \Rightarrow 2\sin\left(\beta+\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{6}{5} \Rightarrow \sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5},$$

$$\text{又 } \beta-\frac{\pi}{6} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 所以 } \cos\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5},$$

$$\text{所以 } \sin(\alpha-\beta)=\sin\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{5}{13} \times \frac{4}{5}-\frac{12}{13} \times \frac{3}{5}=-\frac{16}{65}.$$

20. 【解析】(1) 连接 AE , 设 $AE \cap BD = H$, 连接 FH ,



因为 $PE \parallel$ 平面 BDF , 所以 $PE \parallel FH$, 得到 $\frac{AF}{FP} = \frac{AH}{HE}$,

又菱形 $ABCD$ 中, $\triangle ABH \sim \triangle EDH$, 所以 $\frac{AH}{HE} = \frac{AB}{DE} = 2$,

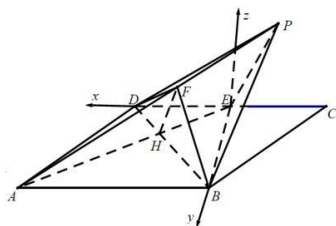
所以 $\frac{AF}{FP} = 2$;

(2) 因为 $\angle BCD = \angle BAD = 60^\circ$, $BC = CD = 4$,

所以 $BE \perp CD \Rightarrow BE \perp ED$, $BE \perp EP$,

因此 $\angle DEP$ 是二面角 $P-BE-A$ 的平面角, $\angle DEP = 120^\circ$,

如图, 以点 E 为原点, ED , EB 所在直线为 x 轴, y 轴, 建立空间直角坐标系 $E-xyz$.



依据题意 $P(-1, 0, \sqrt{3})$, $A(4, 2\sqrt{3}, 0)$, $B(0, 2\sqrt{3}, 0)$, $D(2, 0, 0)$,

从而 $\overrightarrow{DA} = (2, 2\sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{DP} = (-3, 0, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{DB} = (-2, 2\sqrt{3}, 0)$

设平面 AFD 的法向量 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

由 $\vec{m} \perp \overrightarrow{DA}$ 得到 $2x_1 + 2\sqrt{3}y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}y_1$,

由 $\vec{m} \perp \overrightarrow{DP}$ 得到 $-3x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \Rightarrow z_1 = \sqrt{3}x_1$,

$$\text{令 } y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{3}, \quad z_1 = -3, \quad \vec{m} = (-\sqrt{3}, 1, -3),$$

设平面 BFD 的法向量 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{由 } \vec{n} \perp \overrightarrow{DB} \text{ 得到 } -2x_2 + 2\sqrt{3}y_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{3}y_2,$$

$$\text{由 } \vec{n} \perp \overrightarrow{HF} \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{EP} \text{ 得到 } -x_2 + \sqrt{3}z_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{3}z_2,$$

$$\text{令 } y_2 = 1 \Rightarrow x_2 = \sqrt{3}, \quad z_2 = 1, \quad \vec{n} = (\sqrt{3}, 1, 1),$$

$$\text{因此 } \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-3+1-3}{\sqrt{13} \times \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{65}}{13},$$

所以, 所求二面角的余弦值是 $\frac{\sqrt{65}}{13}$.

21. 【解析】(1) Y 可能取值有 0, 1, 2, 3.

$$P(X=0) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16},$$

$$P(X=1) = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \times C_2^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16},$$

$$P(X=2) = \frac{3}{4} \times C_2^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{16},$$

$$P(X=3) = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{16},$$

因此, 随机变量 X 的分布列是

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{16}$

$$\text{数学期望 } EX = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{5}{16} + 2 \times \frac{7}{16} + 3 \times \frac{3}{16} = \frac{7}{4};$$

(2) 设 A 为甲 3 局获得最终胜利, B_1 为前 3 局甲队明星队员 M 上场比赛, B_2 为前 3 局甲队明星队员 M 没有上场比赛,

$$\text{因为每名队员上场顺序随机, } P(B_1) = \frac{C_4^2 A_3^3}{A_5^3} = \frac{3}{5}, \quad P(B_2) = 1 - P(B_1) = \frac{2}{5},$$

$$P(AB_1) = P(B_1)P(A|B_1) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{80},$$

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{13}{80},$$

$$\text{甲队明星队员 } M \text{ 上场的概率 } P(B_1|A) = \frac{P(B_1A)}{P(A)} = \frac{9}{13}.$$

$$22. \text{【解析】} (1) f'(x) = ae^x - 2e^{-x} + (a-2) = \frac{ae^{2x} + (a-2)e^x - 2}{e^x} = \frac{(ae^x - 2)(e^x + 1)}{e^x},$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减;

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) < 0$, 解得 $x < \ln \frac{2}{a}$, 故函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \ln \frac{2}{a}\right)$ 上单调递减,

由 $f'(x) > 0$, 解得 $x > \ln \frac{2}{a}$, 故函数 $f(x)$ 在 $\left(\ln \frac{2}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递减; 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \ln \frac{2}{a}\right)$ 上递减, 在 $\left(\ln \frac{2}{a}, +\infty\right)$ 上递增.

$$(2) \text{ 当 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = ae^{\frac{\pi}{2}} + 2e^{-\frac{\pi}{2}} + (a-2) \cdot \frac{\pi}{2} \geq 0 = (a+2)\cos \frac{\pi}{2},$$

$$\text{即 } \left(e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\right)a \geq \pi - \frac{2}{e^{\frac{\pi}{2}}} > 0, \text{ 故 } a > 0,$$

$$\text{令 } g(x) = f(x) - (a+2)\cos x$$

$$= ae^x + 2e^{-x} + (a-2)x - (a+2)\cos x,$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{ae^{2x} - 2}{e^x} + (a-2) + (a+2)\sin x,$$

若 $a \geq 2$, 则当 $x \in [0, \pi]$ 时, $g'(x) \geq 0$, 函数 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增,

$$\text{当 } x \in (\pi, +\infty) \text{ 时, } g'(x) \geq ae^x - 2e^{-x} + (a-2) - (a+2)$$

$$\geq ae^\pi - 2e^{-\pi} - 4 \geq 4a - \frac{2}{4} - 4 > 0,$$

$\therefore$ 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $g(x)$ 单调递增,

则 $g(x) \geq g(0) = 0$, 符合题意;

若 $0 < a < 2$, 则 $g'(0) = 2(a-2) < 0$,

$$g'(x) \geq ae^x - 2e^{-x} + (a-2) - (a+2) = ae^x - 2e^{-x} - 4,$$

$$\text{由 } ae^x - 2e^{-x} - 4 = 0 \text{ 得 } x = \ln \frac{2 + \sqrt{4+2a}}{a} > 0,$$

$$\text{故 } g' \left(\ln \frac{2 + \sqrt{4+2a}}{a} \right) \geq 0,$$

$$\therefore \text{存在 } x_0 \in \left(0, \ln \frac{2 + \sqrt{4+2a}}{a} \right], \text{ 使得 } g'(x_0) = 0,$$

$$\text{且当 } x \in (0, x_0) \text{ 时, } g'(x) < 0,$$

$$\therefore g(x) \text{ 在 } x \in (0, x_0) \text{ 上单调递减,}$$

$$\therefore \text{当 } x \in (0, x_0) \text{ 时, } g(x) < g(0) = 0, \text{ 不合题意,}$$

综上, 实数 a 的取值范围为 $[2, +\infty)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线