

哈三中 2023—2024 学年度上学期 高三学年期中考试数学试卷

考试说明：(1) 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分。

考试时间为 120 分钟；

(2) 第 I 卷，第 II 卷试题答案均答在答题卡上，交卷时只交答题卡。

第 I 卷（选择题，共 60 分）

一、选择题（共 60 分）

(一) 单项选择题（共 8 小题，每小题 5 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

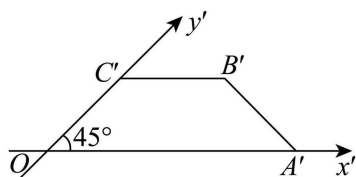
1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$ ， $B = \{x | x = 2a, a \in A\}$ ，则集合 $A \cap B$ 等于

- A. $\{0\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 2\}$

2. 若复数 z 满足 $(1-2i)z = 2-i$ ，则 z 的虚部为

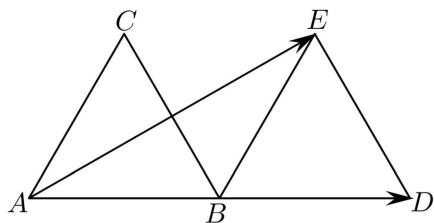
- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}i$ D. $\frac{4}{5}i$

3. 如图，一个水平放置的平面图形的斜二测画法下的直观图是一个底角为 45° 的等腰梯形，已知直观图 $OAB'C'$ 中， $B'C' = 1, OC' = \sqrt{2}$ ，则原平面图形的面积为

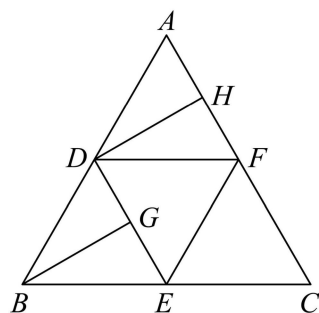


- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$

4. 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$ 都是边长为1的等边三角形, A, B, D 三点共线, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} =$



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
5. 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 若 $\sin C = 2\sin B \cos A$, 且 $(a+b-c)(b+c+a) = 2ab$, 那么 $\triangle ABC$ 是
- A. 直角三角形 B. 等腰三角形
C. 等边三角形 D. 等腰直角三角形
6. 如图, 在边长为4的正三角形 ABC 中, D, E, F 分别为各边的中点, G, H 分别为 DE, AF 的中点, 将 $\triangle ABC$ 沿 DE, EF, DF 折成正四面体 $P-DEF$, 则在此正四面体中, 异面直线 PG 与 DH 所成的角的余弦值为



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{2}$
7. 在《九章算术商功》中将正四面形棱台体(棱台的上、下底面均为正方形)称为方亭. 在方亭 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2A_1B_1 = 2$, 四个侧面均为全等的等腰梯形, 侧面积为 $3\sqrt{3}$, 则该方亭的体积为
- A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{7}{6}$ C. $\frac{7}{2}\sqrt{2}$ D. $\frac{7}{6}\sqrt{2}$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1+x}, & x \leq 1, \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x + a - 2, & x > 1, \end{cases}$ 若总存在实数 t , 使得函数 $g(x) = f(x) - t$ 有

三个零点, 则实数 a 的取值范围为

- A. $a > 0$ B. $a > 0$ 或 $a \leq -\frac{1}{2}$ C. $a > 0$ 或 $a < -\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2} < a < 0$

(二)多项选择题(共4小题, 每小题5分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分)

9. 下列说法中不正确的是

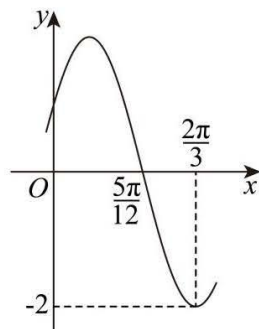
- A. 各侧面都是正方形的正四棱柱一定是正方体
B. 用一个平面截圆锥, 得到一个圆锥和圆台
C. 任意两条直线都可以确定一个平面
D. 空间中三条直线 a, b, c , 若 a 与 b 共面, b 与 c 共面, 则 a 与 c 共面

10. 已知平面向量 $\mathbf{a} = (1, x)$, $\mathbf{b} = (2x, 3-x)$, $x \in \mathbf{R}$, 则下列说法正确的是

- A. 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则 $x = -\frac{3}{2}$ 或 $x = 1$
B. 若 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$, 则 $x = \frac{1}{5}$
C. 当 $x = 3$ 时, 向量 \mathbf{b} 在向量 \mathbf{a} 方向上的投影向量为 $(\frac{3}{5}, \frac{9}{5})$
D. 若 $x < 0$ 或 $x > 5$, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 夹角为钝角

11. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的部分图象如图所示, 则下列结论正确的是

- A. $f(x + \frac{\pi}{6})$ 为偶函数
B. $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增
C. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ 对称
D. 若函数 $y = f(\lambda x)$ ($\lambda > 0$) 在 $[0, \pi]$ 上没有零点, 则 $\lambda \in (0, \frac{5}{12})$



12. 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x), g(x)$ 满足 $y = g(x+1)$ 为偶函数, 且 $f(x) + g(1-x) = 3$, $g(x) - f(x-3) = 1$, $g(1) = 1$, 则下列说法正确的是
- A. $f(x)$ 为偶函数
B. $g(x)$ 图象关于点 $(-1, 0)$ 对称
- C. $g(x)$ 是以 4 为周期的周期函数
D. $\sum_{i=1}^{33} f(i) = 33$

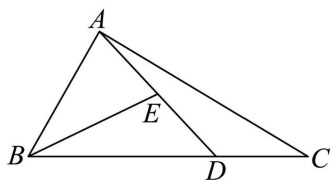
第II卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 将答案填在答题卡相应的位置上)

13. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 1)$, $\mathbf{b} = (3, 4)$, 则 $\cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle =$ _____.
14. 函数 $y = \sqrt{3 - \log_2(x^2 - 2x)}$ 的定义域为 _____.
15. 已知 i 为虚数单位, 且 $|z + 1 - 2i| = 2$, 则 $|z|$ 的最大值是 _____.
16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边为 a, b, c , 点 D 在边 BC 上且 AD 为角 A 的角平分线, $AD = BD = 2$, 则边 AC 的取值范围是 _____.

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overline{BD} = 2\overline{DC}$, E 是 AD 的中点, 设 $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{AC} = \mathbf{b}$.



- (1) 试用 \mathbf{a}, \mathbf{b} 表示 $\overline{AD}, \overline{BE}$;
- (2) 若 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角为 60° , 求 $\overline{AD} \cdot \overline{BE}$.

18. (1) 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{2}$, 求 $\frac{\sin 2\alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ 的值;

(2) 已知 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}$, 求 $\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

19. 设向量 $\mathbf{a} = (\sqrt{3}\sin x, \sin x)$, $\mathbf{b} = (\cos x, \sin x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(1) 若 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, 求 x 的值;

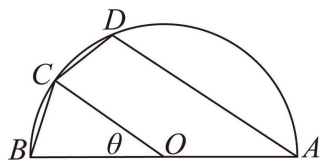
(2) 设函数 $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 求 $f(x)$ 的最大值.

20. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $(2b - c)\cos A = a\cos C$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $c - b = 2$, $a = \sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

21. 如图, 有一景区的平面图是一个半圆形, 其中 O 为圆心, 直径 AB 的长为 2km , C, D 两点在半圆弧上, 且 $BC = CD$, 设 $\angle COB = \theta$.



- (1) 当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, 求四边形 $ABCD$ 的面积;
- (2) 若要在景区内铺设一条由线段 AB, BC, CD 和 DA 组成的观光道路, 则当 θ 为何值时, 观光道路的总长 l 最长, 并求出 l 的最大值.

22. 已知函数 $f(x) = 2e^x - \sin 2x$.

- (1) 当 $x \geq 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值;
- (2) 若对于 $\forall x \in (-\frac{\pi}{12}, +\infty)$, 不等式 $4xe^x + x \cos 2x - ax^2 - 5x \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围. (参考数据 $\ln 2 \approx 0.7, \ln 3 \approx 1.1$)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

