

2023~2024 学年高三核心模拟卷(上)

数学(一)

注意事项:

1. 本卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 本卷命题范围:集合、常用逻辑用语、不等式、函数、导数。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 哥德巴赫猜想是世界近代三大数学难题之一,即所谓的“1+1”问题. 1966 年,我国数学家陈景润证明了“1+2”成立. 哥德巴赫猜想的内容是“每一个大于 2 的偶数都能写成两个质数之和”,则该猜想的否定为
 - A. 每一个小于 2 的偶数都不能写成两个质数之和
 - B. 存在一个小于 2 的偶数不能写成两个质数之和
 - C. 每一个大于 2 的偶数都不能写成两个质数之和
 - D. 存在一个大于 2 的偶数不能写成两个质数之和
2. 设集合 $A = \{2, a\}$, $B = \{-1, a^2 - 2\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则实数 $a =$
 - A. -2
 - B. -1
 - C. -1 或 -2
 - D. -1 或 ±2
3. 已知函数 $f(x) = e^x - x^3 + f'(0)x^2 - f'(0)x$, 则 $f'(0) =$
 - A. $-\frac{1}{4}$
 - B. $-\frac{1}{2}$
 - C. $\frac{1}{4}$
 - D. $\frac{1}{2}$
4. 已知 m 为实数, 则“ $m^3 < 1$ ”是“ $m^2 < 1$ ”的
 - A. 充分不必要条件
 - B. 必要不充分条件
 - C. 充要条件
 - D. 既不充分也不必要条件
5. 若幂函数 $f(x) = (2m^2 - 3m - 1)x^m$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 $m =$
 - A. 2
 - B. $\frac{1}{2}$
 - C. $-\frac{1}{2}$
 - D. -2
6. 某同学解关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c < 0 (a \neq 0)$ 时, 因弄错了常数 c 的符号, 解得其解集为 $(-\infty, -3) \cup (-2, +\infty)$, 则不等式 $bx^2 + cx + a > 0$ 的解集为
 - A. $(-1, \frac{1}{5})$
 - B. $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{5}, +\infty)$
 - C. $(\frac{1}{5}, 1)$
 - D. $(-\infty, \frac{1}{5}) \cup (1, +\infty)$

16. 已知函数 $y = x^3 f(x-1)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 若函数 $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+2x+2} + x + 1) + \frac{e^{x+1}-1}{e^{x+1}+1}$ 的图象与 $f(x)$ 的图象交点的横坐标从小到大依次为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2023}$, 则 $\sum_{k=1}^{2023} x_k =$ _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

设集合 $A = \{x | -4 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | x^2 - 4x - 5 < 0\}$, $C = \{x | x^2 - (a+4)x + 2(a+2) < 0\}$.

(1) 求 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B$;

(2) 从下面①②③中选择一个作为已知条件, 求实数 a 的取值范围.

① $C \subseteq (\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$; ② $C \subseteq (A \cup B)$; ③ $(A \cap B) \cap C = \emptyset$.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (本小题满分 12 分)

已知 $ax^2 + 2ax + \frac{1}{2} \geq 0$ 对任意实数 x 恒成立.

(1) 求实数 a 的取值所构成的集合 A ;

(2) 在(1)的条件下, 设函数 $g(x) = -x^2 + x + 1 + m$ 在 $[0, 1]$ 上的值域为集合 B , 若 $x \in B$ 是 $x \in A$ 的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

某乡镇全面实施乡村振兴战略, 大力推广“毛绒玩具”加工产业. 某生产合作社组建加工毛绒玩具的分厂, 需要每年投入固定成本 10 万元, 每加工 x 万件玩具, 需要流动成本 $C(x)$ 万元. 当年加工量不足 15 万件时, $C(x) = 12x - 12\ln(x+1)$; 当年加工量不低于 15 万件时, $C(x) = 21x + \frac{256}{x-2} - 200$. 通过市场分析, 加工后的玩具以每件 20 元的价格, 全部由总厂收购.

(1) 求年利润 $f(x)$ 关于年加工量 x 的解析式; (年利润 = 年销售收入 - 流动成本 - 年固定成本)

(2) 当年加工量为多少万件时, 该合作社的年利润最大? 最大年利润是多少? (参考数据: $\ln 2 \approx 0.69$)

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 对任意实数 x, y 恒有 $f(x-y) + f(x+y) = f(2x)$ 成立, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) > 0$.

(1) 求 $f(0)$ 的值;

(2) 判断 $f(x)$ 的单调性, 并证明;

(3) 解关于 x 的不等式: $f[x^2 - (a+2)x] + f(a+y) + f(a-y) > 0$.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的偶函数, $g(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数, 且 $f(x) + g(x) = 2^{x+1}$, 记 $F(x) = \log_2 f(x)$.

(1) 求 $F(x)$ 的最小值;

(2) 解关于 m 的不等式 $F(m+2) > F(3m-1)$;

(3) 设 $H(x) = -\log_{0.5}(a \cdot 2^x + 2a)$ ($a > 0$), 若 $F(x)$ 的图象与 $H(x)$ 的图象有 2 个交点, 求 a 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ax - \ln x - \frac{2}{x}$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 当 $a = -1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 当 $ax_2 < x_1 < x_2$ 时, 证明: $(x_1 + x_2) \left(a + \frac{2}{x_1 x_2} \right) < \frac{a+1}{\sqrt{a}}$.

2023~2024 学年高三核心模拟卷(上)

数学(一)参考答案

1. D 全称量词命题的否定为存在量词命题, A, C 错误; 哥德巴赫猜想的否定为“存在一个大于 2 的偶数不能写成两个质数之和”. 故选 D.
2. A 由 $A \cap B \neq \emptyset$, 得 $a = -1$, 或 $a^2 - 2 = 2$, 或 $a^2 - 2 = a$, 解得 $a = -1, a = \pm 2$, 但 $a = 1, a = 2$ 不满足集合中元素的互异性, $a = -2$ 符合, 所以 $a = -2$. 故选 A.
3. D 由题意知 $f'(x) = e^x - 3x^2 + 2f'(0)x - f'(0)$, 所以 $f'(0) = 1 - f'(0)$, 解得 $f'(0) = \frac{1}{2}$. 故选 D.
4. B $m^3 < 1 \Leftrightarrow m < 1, m^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < m < 1$. 由 $-1 < m < 1$ 可以推出 $m < 1$, 但 $m < 1$ 推不出 $-1 < m < 1$, 故“ $m^3 < 1$ ”是“ $m^2 < 1$ ”的必要不充分条件. 故选 B.
5. C 由幂函数的定义可知, $2m^2 - 3m - 1 = 1$, 即 $2m^2 - 3m - 2 = 0$, 解得 $m = 2$ 或 $m = -\frac{1}{2}$. 当 $m = 2$ 时, $f(x) = x^2$, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 不合题意; 当 $m = -\frac{1}{2}$ 时, $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 符合题意, 故 $m = -\frac{1}{2}$. 故选 C.
6. C 由题意可知 $a < 0$, 且 $-3 + (-2) = -\frac{b}{a}, -3 \times (-2) = -\frac{c}{a}$. 所以 $b = 5a, c = -6a$, 所以 $bx^2 + cx + a > 0$ 化为 $5x^2 - 6x + 1 < 0$, 解得 $\frac{1}{5} < x < 1$. 故选 C.
7. A 由题意可知 $a > 0, b > 0$, 且 $ab = a - b + 5$, 所以 $b = \frac{a+5}{a+1}$, 则该矩形的周长为 $l = 2(a+b) = 2\left(a + \frac{a+5}{a+1}\right) = 2\left[(a+1) + \frac{4}{a+1}\right] \geq 2 \times 2\sqrt{(a+1) \cdot \frac{4}{a+1}} = 8$, 当且仅当 $a+1 = \frac{4}{a+1}$, 即 $a = 1, b = 3$ 时, 取得等号, 此时 $S = 3$. 故选 A.
8. B 设 $f(x) = x^2 + \log_2 x$, 易知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0, f(1) = 1 > 0$, 所以 $\frac{1}{2} < a < 1$; 设 $g(x) = \left(\frac{1}{2^{0.23}}\right)^x - \log_2 x$, 易知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $g(1) = \frac{1}{2^{0.23}} > 0, g(2^{0.23}) = \left(\frac{1}{2^{0.23}}\right)^{2^{0.23}} - 1 < 0$, 所以 $1 < b < 2^{0.23}$, 因为 $c = \log_7 \sqrt{6} < \log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$, 所以 $c < \frac{1}{2}$. 综上可知, $c < a < b$. 故选 B.
9. AB 因为 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 $f(g(x))$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 故 A 正确; 因为 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 所以 $f(g(x))$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 故 B 正确; 因为 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 所以 $-g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 因为 $-g(x)$ 是否在 $(-\infty, 0)$ 上无法判断, 所以 $g(-g(x))$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的单调性无法判断, 故 C 错误; 因为 $-f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 因 $-f(x)$ 是否在 $[0, +\infty)$ 上无法判断, 所以 $g(-f(x))$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性无法判断, 故 D 错误. 故选 AB.
10. ABC 由 $\frac{1}{\sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{b}}$ 知 $a > 0, b > 0, \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 所以 $ab \times \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \times ab$, 即 $0 < b < a$, 所以 $b^2 < a^2$, 故 A, B 均正确; $a + \frac{1}{a+1} = (a+1) + \frac{1}{a+1} - 1 \geq 2\sqrt{(a+1) \times \frac{1}{a+1}} - 1 = 1$, 当且仅当 $a+1 = \frac{1}{a+1}$, 即 $a = 0$ 时等号成立, 因为 $a > 0$, 所以 $a + \frac{1}{a+1} >$



1, 故 C 正确; 由 $0 < b < a$, 得 $b - a < 0$, $\frac{a+1}{b+1} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+1) - a(b+1)}{b(b+1)} = \frac{b-a}{b(b+1)} < 0$, 所以 $\frac{a+1}{b+1} < \frac{a}{b}$, 故 D 错误. 故选 ABC.

11. BCD 对于 A, 由 $10 = 10 \ln \frac{100-20}{\theta-20}$, 得 $\ln \frac{80}{\theta-20} = 1$, 所以 $\frac{80}{\theta-20} = e$, 整理, 得 $\theta = 20 + \frac{80}{e} \approx 50$, 故 A 错误; 对于 B, $t = 20 \ln \frac{80}{60-20} = 20 \ln 2 \approx 14$, 故 B 正确; 对于 C, 由 $f(60) = 10$, 得 $\frac{1}{k} \ln \frac{80}{40} = 10$, 即 $k = \frac{1}{10} \ln 2$, 则 $f(40) = \frac{10}{\ln 2} \ln \frac{80}{40-20} = \frac{20}{\ln 2} \ln 2 = 20$, 故 C 正确; 设这杯水从 100°C 冷却到 80°C 所需时间为 t_1 分钟, 则 $t_1 = \frac{1}{k} \ln \frac{80}{80-20} = \frac{1}{k} \ln \frac{4}{3}$, 设这杯水从 80°C 冷却到 60°C 所需时间为 t_2 分钟, 则 $t_2 = \frac{1}{k} \ln \frac{80-20}{60-20} = \frac{1}{k} \ln \frac{3}{2}$, 因为 $t_1 - t_2 = \frac{1}{k} (\ln \frac{4}{3} - \ln \frac{3}{2}) = \frac{1}{k} \ln \frac{8}{9} < 0$, 所以 $t_1 < t_2$, 故 D 正确. 故选 BCD.

12. ACD 易知 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$. 当 $a = e$ 时, 由 $f'(x) = \frac{1}{x} - 3x^2 = \frac{1-3x^3}{x}$, 得当 $0 < x < \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt[3]{\frac{1}{3}})$ 上单调递增, 在 $(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x)_{\max} = f(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}) = \ln \sqrt[3]{\frac{1}{3}} - (\sqrt[3]{\frac{1}{3}})^3 = -\frac{\ln 3 + 1}{3}$, 故 A 正确; $f'(x) = \frac{1}{x \ln a} - 3x^2 = \frac{1}{x} (\frac{1}{\ln a} - 3x^3)$, 当 $0 < a < 1$ 时, $\ln a < 0$, 又 $x > 0$, 故 $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 在定义域上单调递减, $f(x)$ 无极值, 故 B 错误; 设切点为 $P(x_0, \log_a x_0 - x_0^3)$, 则 $f'(x_0) = \frac{1}{x_0 \ln a} - 3x_0^2$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在 P 处的切线方程为 $y - (\log_a x_0 - x_0^3) = (\frac{1}{x_0 \ln a} - 3x_0^2)(x - x_0)$, 将 $(0, 0)$ 代入切线方程, 得 $x_0^3 - \log_a x_0 = (\frac{1}{x_0 \ln a} - 3x_0^2)(-x_0)$, 所以 $\frac{1}{\ln a} - \log_a x_0 = 2x_0^3$, 即 $\frac{1}{\ln a} (1 - \ln x_0) = 2x_0^3$, 显然 $x_0 \neq e$, 所以 $\frac{1}{\ln a} = \frac{2x_0^3}{1 - \ln x_0}$, 设 $g(x) = \frac{2x^3}{1 - \ln x} (x > 0 \text{ 且 } x \neq e)$, 则 $g'(x) = \frac{2x^2(4 - 3 \ln x)}{(1 - \ln x)^2}$, 易得当 $x \in (0, e) \cup (e, e^{\frac{4}{3}})$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in (e^{\frac{4}{3}}, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 和 $(e, e^{\frac{4}{3}})$ 上单调递增, 在 $(e^{\frac{4}{3}}, +\infty)$ 上单调递减, 又 $x \in (0, e)$ 时, $g(x) > 0$, $x \in (e, e^{\frac{4}{3}})$ 时, $g(x) < 0$, 且 $x \rightarrow e, g(x) \rightarrow -\infty, g(x)$ 的极大值为 $g(e^{\frac{4}{3}}) = -6e^{\frac{4}{3}}$, 且 $x \rightarrow +\infty, g(x) \rightarrow -\infty$. 由题意可知, 函数 $g(x)$ 的图象与直线 $y = \frac{1}{\ln a}$ 有两个不同的交点, 则 $\frac{1}{\ln a} < -6e^{\frac{4}{3}}$, 所以 $\frac{1}{-6e^{\frac{4}{3}}} < \ln a < 0$, 所以 $e^{-\frac{1}{6e^{\frac{4}{3}}}} < a < 1$, 故 C 正确; 要使 $f(x)$ 有两个零点, 则方程 $x^3 = \log_a x$ 有两个解, 即方程 $x^3 = \frac{\ln x}{\ln a}$ 有两个解, 所以方程 $\ln a = \frac{\ln x}{x^3}$ 有两个解, 设 $h(x) = \frac{\ln x}{x^3} (x > 0)$, 则 $h'(x) = \frac{1 - 3 \ln x}{x^4}$, 当 $x \in (0, e^{\frac{1}{3}})$ 时, $h'(x) > 0$, 当 $x \in (e^{\frac{1}{3}}, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, e^{\frac{1}{3}})$ 上单调递增, 在 $(e^{\frac{1}{3}}, +\infty)$ 上单调递减, 且 $h(x)$ 的极大值为 $h(e^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3e}$, 又 $h(1) = 0$, 当 $x > e^{\frac{1}{3}}$ 时, $h(x) > 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow 0$, 所以要使函数 $h(x)$ 的图象与直线 $y = \ln a$ 有两个公共点, 必有 $0 < \ln a < \frac{1}{3e}$, 解得 $1 < a < e^{\frac{1}{3e}}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

13. 1 因为 $\frac{1}{\pi}$ 为 $[0, 1]$ 上的无理数, 所以 $R(\frac{1}{\pi}) = 0$, 所以 $D(R(\frac{1}{\pi})) = D(0) = 1$.

14. 6(或 8, 或 10) 由题意可知, 集合 A 含有 4 个元素, m 有 4 个因数, 除 1 和它本身 m 外, 还有 2 个因数. 所以 m 的值可以为 6, 8, 10, 故 m 的一个值为 6(或 8, 或 10).

15. $-\frac{2}{3}x - \frac{16}{3x}$ 由 $f(2x) - 2f\left(\frac{2}{x}\right) = 4x$, 得 $f(2x) - 2f\left(\frac{4}{2x}\right) = 2 \cdot (2x)$, 即 $f(x) - 2f\left(\frac{4}{x}\right) = 2x$ ①, 将 x 换为 $\frac{4}{x}$, 得

$$f\left(\frac{4}{x}\right) - 2f(x) = 2 \times \frac{4}{x}$$
②, 由①+2×②, 得 $-3f(x) = 2x + \frac{16}{x}$, 故 $f(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{16}{3x}$.

16. -2 023 函数 $y = x^3 f(x-1)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 所以 $-x^3 f(-x-1) = x^3 f(x-1)$, 所以 $-f(-x-1) = f(x-1)$, 则

$$f(-x-1) = -f(x-1), \text{ 所以 } f(x-1) \text{ 是奇函数, 故 } f(x) \text{ 的图象关于点 } (-1, 0) \text{ 对称. } g(x) = \ln(\sqrt{x^2+2x+2} + x + 1) + \frac{e^{x+1}-1}{e^{x+1}+1} = \ln[\sqrt{(x+1)^2+1} + (x+1)] + \frac{e^{x+1}-1}{e^{x+1}+1}, \text{ 易知 } g(x) \text{ 的定义域为 } \mathbf{R}, \text{ 令 } h(x) = g(x-1) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x) + \frac{e^x-1}{e^x+1}, \text{ 因为 } h(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x) + \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = -\ln(\sqrt{x^2+1} + x) - \frac{e^x-1}{e^x+1} = -h(x), \text{ 所以 } h(x) \text{ 为奇函数, 即 } g(x-1) \text{ 为奇函数, 则 } g(x) \text{ 的图象关于点 } (-1, 0) \text{ 对称, 故 } f(x) \text{ 的图象与 } g(x) \text{ 的图象的交点关于点 } (-1, 0) \text{ 对称, 所以 } x_1 + x_{2023} = -2, x_2 + x_{2022} = -2, \dots, x_{1012} = -1, \text{ 所以 } \sum_{k=1}^{2023} x_k = -2 \cdot 023.$$

17. 解: (1) 由 $A = \{x | -4 \leq x \leq 2\}$, 得 $\complement_{\mathbf{R}} A = \{x | x < -4, \text{ 或 } x > 2\}$, 1分

又 $B = \{x | x^2 - 4x - 5 < 0\} = \{x | -1 < x < 5\}$, 2分

所以 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B = \{x | x < -4, \text{ 或 } x > 1\}$ 3分

(2) 因为 $x^2 - (a+4)x + 2(a+2) = 0$ 的两根分别为 $2, a+2$ 4分

选择①, 由(1)得, $\complement_{\mathbf{R}} A \cap B = \{x | 2 < x < 5\}$, 故 $C \subseteq \{x | 2 < x < 5\}$ 5分

当 $a+2=2$, 即 $a=0$ 时, $C = \emptyset$, 满足题意; 6分

当 $a+2 > 2$, 即 $a > 0$ 时, $C = \{x | 2 < x < a+2\}$, 7分

由 $C \subseteq \{x | 2 < x < 5\}$, 得 $a+2 \leq 5$, 解得 $a \leq 3$, 所以 $0 < a \leq 3$; 8分

当 $a+2 < 2$, 即 $a < 0$ 时, $C = \{x | a+2 < x < 2\}$, 不满足 $C \subseteq (\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$ 9分

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $[0, 3]$ 10分

选择②, 由(1)得, $A \cup B = \{x | -4 \leq x < 5\}$, 故 $C \subseteq \{x | -4 \leq x < 5\}$, 5分

当 $a+2=2$, 即 $a=0$ 时, $C = \emptyset$, 满足题意; 6分

当 $a+2 > 2$, 即 $a > 0$ 时, $C = \{x | 2 < x < a+2\}$, 7分

由 $C \subseteq \{x | -4 \leq x < 5\}$, 得 $a+2 \leq 5$, 解得 $a \leq 3$, 所以 $0 < a \leq 3$; 8分

当 $a+2 < 2$, 即 $a < 0$ 时, $C = \{x | a+2 < x < 2\}$, 9分

由 $C \subseteq \{x | -4 \leq x < 5\}$, 得 $a+2 \geq -4$, 解得 $a \geq -6$, 所以 $-6 \leq a < 0$ 9分

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $[-6, 3]$ 10分

选择③, 由(1)得 $A \cap B = \{x | -1 < x \leq 2\}$, 5分

当 $a+2=2$, 即 $a=0$ 时, $C = \emptyset$, 满足题意; 6分

当 $a+2 > 2$, 即 $a > 0$ 时, $C = \{x | 2 < x < a+2\}$, 此时 $C \cap (A \cap B) = \emptyset$ 成立, 满足题意, 所以 $a > 0$; 8分

当 $a+2 < 2$, 即 $a < 0$ 时, $C = \{x | a+2 < x < 2\}$, 显然不满足 $C \cap (A \cap B) = \emptyset$ 9分

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $[0, +\infty)$ 10分

18. 解: (1) 由题意知 $ax^2 + 2ax + \frac{1}{2} \geq 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 1分



当 $a=0$ 时,原不等式变为 $\frac{1}{2} \geq 0$,符合题意; 2分

当 $a \neq 0$ 时, $ax^2 + 2ax + \frac{1}{2} \geq 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立的充要条件为 $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = 4a^2 - 4 \times \frac{1}{2} a \leq 0, \end{cases}$ 4分

解得 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 5分

综上所述,实数 a 的取值所构成的集合 $A = [0, \frac{1}{2}]$ 6分

(2) $g(x) = -x^2 + x + 1 + m = -(x - \frac{1}{2})^2 + m + \frac{5}{4}$, $x \in [0, 1]$, 所以 $B = [m + 1, m + \frac{5}{4}]$, 8分

由 $x \in B$ 是 $x \in A$ 的充分不必要条件,得 $B \subseteq A$, 9分

所以 $\begin{cases} m + 1 \geq 0, \\ m + \frac{5}{4} \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq m \leq -\frac{3}{4}$, 11分

经检验知 $-1 \leq m \leq -\frac{3}{4}$ 满足题意.

故实数 m 的取值范围为 $[-1, -\frac{3}{4}]$ 12分

19. 解:(1) 当 $0 < x < 15$ 时, $f(x) = 20x - 10 - [12x - 12\ln(x+1)] = 8x + 12\ln(x+1) - 10$, 2分

当 $x \geq 15$ 时, $f(x) = 20x - 10 - (21x + \frac{256}{x-2} - 200) = 190 - x - \frac{256}{x-2}$ 4分

所以 $f(x) = \begin{cases} 8x + 12\ln(x+1) - 10, & 0 < x < 15, \\ 190 - x - \frac{256}{x-2}, & x \geq 15. \end{cases}$ 5分

(2) 当 $0 < x < 15$ 时, $f'(x) = 8 + \frac{12}{x+1} > 0$, 6分

所以 $f(x)$ 在 $(0, 15)$ 上单调递增,

所以 $f(x) < f(15) = 8 \times 15 + 12\ln 16 - 10 = 110 + 48\ln 2 \approx 143.12$, 8分

当 $x \geq 15$ 时, $f(x) = 188 - [(x-2) + \frac{256}{x-2}] \leq 188 - 2\sqrt{(x-2) \times \frac{256}{x-2}} = 156$,

当且仅当 $x-2 = \frac{256}{x-2}$, 即 $x=18$ 时取得等号. 11分

因为 $156 > 143.12$, 所以当年加工量为 18 万件时,该合作社获得的年利润最大,且最大年利润为 156 万元.

..... 12分

20. 解:(1) 令 $x=0, y=0$, 则 $f(0) + f(0) = f(0)$, 所以 $f(0) = 0$ 2分

(2) $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的减函数. 3分

证明: 令 $x=0$, 则 $f(-y) + f(y) = f(0) = 0$, 所以 $f(-y) = -f(y)$, 故 $f(x)$ 为奇函数. 4分

任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_1 - x_2 < 0$, 所以 $f(x_1 - x_2) > 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) + f(-x_2) = f(\frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2}) + f(\frac{x_1 - x_2}{2} - \frac{x_1 + x_2}{2}) = f(x_1 - x_2) > 0$, 6分



所以 $f(x_1) > f(x_2)$, 故 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的减函数. 7 分

(3) 由题意得 $f(x^2 - (a+2)x) > -[f(a+y) + f(a-y)] = -f(2a) = f(-2a)$, 8 分

由(2)知 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减,

所以 $x^2 - (a+2)x < -2a$, 即 $x^2 - (a+2)x + 2a < 0$,

所以 $(x-2)(x-a) < 0$ 9 分

当 $a > 2$ 时, 原不等式的解集为 $(2, a)$; 10 分

当 $a = 2$ 时, 原不等式的解集为 \emptyset ; 11 分

当 $a < 2$ 时, 原不等式的解集为 $(a, 2)$ 12 分

21. 解: (1) 由题意知, $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$,

由 $f(x) + g(x) = 2^{x+1}$, 得 $f(-x) + g(-x) = 2^{-x+1}$, 即 $f(x) - g(x) = 2^{-x+1}$, 1 分

两式相加, 得 $f(x) = \frac{1}{2}(2^{x+1} + 2^{-x+1}) = 2^x + 2^{-x}$,

所以 $F(x) = \log_2(2^x + 2^{-x})$ 2 分

因为 $2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 2$, 当且仅当 $2^x = 2^{-x}$, 即 $x = 0$ 时等号成立, 所以 $F(x)_{\min} = \log_2 2 = 1$ 3 分

(2) 因为 $F(-x) = \log_2(2^{-x} + 2^x) = F(x)$, 所以 $F(x)$ 为偶函数, 4 分

因为 $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2 = \frac{4^x - 1}{2^x} \ln 2$,

所以当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

所以 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减. 6 分

由 $F(m+2) > F(3m-1)$, 得 $|m+2| > |3m-1|$,

两边平方并整理得 $8m^2 - 10m - 3 < 0$, 解得 $-\frac{1}{4} < m < \frac{3}{2}$,

故不等式 $F(m+2) > F(3m-1)$ 的解集为 $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2})$ 8 分

(3) 由题意知, 方程 $\log_2(2^x + 2^{-x}) = \log_2(a \cdot 2^x + 2a)$ ($a > 0$) 有 2 个不同的实数解,

即方程 $2^x + 2^{-x} = a \cdot 2^x + 2a$ ($a > 0$) 有 2 个不同的实数解. 9 分

设 $t = 2^x$ ($t > 0$), 则 $t + \frac{1}{t} = at + 2a$, 即 $(1-a)t^2 - 2at + 1 = 0$ 有 2 个不同的正根.

则 $\begin{cases} 1-a \neq 0, \\ \Delta = 4a^2 - 4(1-a) > 0, \\ \frac{2a}{1-a} > 0, \\ \frac{1}{1-a} > 0, \end{cases}$ 解得 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < a < 1$, 11 分

故 a 的取值范围为 $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)$ 12 分

22. (1) 解: $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,



当 $a = -1$ 时, $f(x) = -x - \ln x - \frac{2}{x}$,

所以 $f'(x) = -1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = -\frac{x^2 + x - 2}{x^2} = -\frac{(x+2)(x-1)}{x^2} (x > 0)$, 1分

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, 单调递减区间为 $(1, +\infty)$ 3分

(2) 证明: 由 $f(x_1) = f(x_2)$, 得 $ax_1 - \ln x_1 - \frac{2}{x_1} = ax_2 - \ln x_2 - \frac{2}{x_2}$,

所以 $\ln x_2 - \ln x_1 = a(x_2 - x_1) + \frac{2}{x_1} - \frac{2}{x_2} = a(x_2 - x_1) + \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}$.

则 $\frac{1}{x_2 - x_1} \ln \frac{x_2}{x_1} = a + \frac{2}{x_1 x_2}$, 4分

要证 $(x_1 + x_2) \left(a + \frac{2}{x_1 x_2} \right) < \frac{a+1}{\sqrt{a}}$, 只需证 $(x_1 + x_2) \left(\frac{1}{x_2 - x_1} \ln \frac{x_2}{x_1} \right) < \frac{a+1}{\sqrt{a}}$,

即证 $\frac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1} \ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{a+1}{\sqrt{a}}$,

需证 $\frac{1 + \frac{x_2}{x_1}}{\frac{x_2}{x_1} - 1} \ln \frac{x_2}{x_1} < \frac{a+1}{\sqrt{a}}$ 5分

令 $t = \frac{x_2}{x_1} > 1$, 设 $g(t) = \frac{t+1}{t-1} \ln t (t > 1)$, 则 $g'(t) = \frac{t - \frac{1}{t} - 2 \ln t}{(t-1)^2}$,

设 $h(t) = t - \frac{1}{t} - 2 \ln t (t > 1)$, 则 $h'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} = \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^2 > 0$,

所以 $h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $h(t) > h(1) = 0$,

所以 $g'(t) > 0$, 所以 $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 7分

由 $ax_2 < x_1 < x_2$, 得 $\frac{1}{a} > \frac{x_2}{x_1} > 1$,

所以 $g\left(\frac{x_2}{x_1}\right) < g\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1 + \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - 1} \ln \frac{1}{a} = \frac{a+1}{1-a} \ln \frac{1}{a}$,

所以需证 $\frac{1+a}{1-a} \ln \frac{1}{a} < \frac{a+1}{\sqrt{a}}$, 即证 $\ln \frac{1}{a} < \frac{1-a}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}$ 9分

令 $u = \frac{1}{\sqrt{a}}$, 则 $u > 1$, 即证 $2 \ln u < u - \frac{1}{u}$, 设 $\varphi(u) = 2 \ln u - u + \frac{1}{u}$,

则 $\varphi'(u) = \frac{2}{u} - 1 - \frac{1}{u^2} = \frac{-(u-1)^2}{u^2} < 0$,

所以 $\varphi(u)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 则 $\varphi(u) < \varphi(1) = 0$, 11分

所以 $2 \ln u - u + \frac{1}{u} < 0$, 即 $\ln \frac{1}{a} < \frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}$ 成立,

故 $(x_1 + x_2) \left(a + \frac{2}{x_1 x_2} \right) < \frac{a+1}{\sqrt{a}}$ 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线